

BÖLÜM 2

NİCEL FİNANS MODELLERİNDE SIÇRAMA-DİFÜZYON VE PURE SIÇRAMA SÜREÇLERİ: LÉVY TABANLI YAKLAŞIMLAR*

Akbar BARATI CHİYANEH¹, Hamit MİRİTAGİOĞLU²,
Yıldırım DEMİR³

* Bu çalışma, “Finansal modellemede jump difüzyon ve pure jump süreçleri uygulaması” başlıklı yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

1 Dr. Öğr. Üyesi, Uygulamalı Matematik Bölümü, Matematik, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Fakültesi, Tebriz Üniversitesi, Tebriz, İran. E-posta: baratiakbar@tabrizu.ac.ir, baratiakbar@yahoo.com | ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4401-5477>

Bu çalışma, “Finansal modellemede jump difüzyon ve pure jump süreçleri uygulaması” başlıklı yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

2 Prof. Dr., İstatistik, Fen Edebiyat Fakültesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Bitlis, Türkiye. E-posta: hmirtagioglu@beu.edu.tr, hamitsa86@gmail.com | ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2952-9584>

3 Doç. Dr., Ekonometri Bölümü, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, Türkiye. E-posta: ydemir@yyu.edu.tr, ydemir.yyu@gmail.com | ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6350-8122>



Lisans: Creative Commons Atıf 4.0 Uluslararası (*License: Creative Commons Attribution 4.0 International*) (CC BY 4.0).

Açık Erişim / Open Access.

DOI (kitap): <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220>

Tavsiye Edilen Atıf / Recommended Citation:

Barati Chiyaneh, A., Mirtagioglu, H. ve Demir, Y. (2025). Nicel Finans Modellerinde Sıçrama-Difüzyon ve Pure Sıçrama Süreçleri: Lévy Tabanlı Yaklaşımlar. E. Hayat (Ed.), *Nicel Karar Vermede İleri İstatistiksel Yaklaşımlar* içinde (ss. 37-77). Turkuaz Yayınları. <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220.c164>

Özet

Finansal varlık fiyatlarının modellenmesinde geleneksel olarak Brownian hareketine dayanan ve normal dağılım varsayımı içeren sürekli modeller (Black-Scholes gibi) kullanılmaktadır. Ancak son yıllarda yapılan ampirik çalışmalar, finansal getiri dağılımlarının çarpık ve ağır kuyruklu olduğunu, volatilité kümelenmeleri barındırdığını ve fiyat yörüngelerinin süreklilik arz etmeyip ani sıçramalar içerdiğini göstermektedir. Bu çalışmada, klasik difüzyon modellerinin özellikle kısa vadeli fiyat hareketlerini ve piyasa mikroyapısını açıklamada yetersiz kaldığı; SLM hisse senedi ve S&P 500 endeksi verileri üzerinden yapılan karşılaştırmalarla ortaya konulmaktadır. Çalışma, normal dağılımdan sapmaları ve piyasa dinamiklerindeki süreksizlikleri daha iyi temsil eden Lévy tabanlı yaklaşımlara odaklanmaktadır. Bu bağlamda, opsiyon fiyatlamasında volatilité gülümsemesini açıklama ve risk yönetiminde daha gerçekçi sonuçlar üretme kapasitesine sahip olan sıçrama-difüzyon (jump-diffusion) ve saf sıçrama (pure jump) süreçleri ele alınmaktadır. Bu modellerin teorik temelleri ve finansal modellemedeki üstünlükleri detaylı bir şekilde tartışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Nicel Finans, Lévy Süreçleri, Sıçrama-Difüzyon Modelleri, Saf Sıçrama Süreçleri, Brownian Hareketi, Finansal Modelleme.

JUMP-DIFFUSION AND PURE JUMP PROCESSES IN QUANTITATIVE FINANCE MODELS: LÉVY-BASED APPROACHES

Abstract

Traditionally, continuous models based on Brownian motion and the assumption of normal distribution (such as Black-Scholes) have been used to model financial asset prices. However, recent empirical studies demonstrate that financial return distributions are skewed, exhibit heavy tails and volatility clustering, and that price paths are not continuous but rather contain sudden jumps. This study highlights the inadequacy of classical diffusion models, particularly in explaining short-term price movements and market microstructure, through comparisons using SLM stock and S&P 500 index

data. The study focuses on Lévy-based approaches, which better represent deviations from the normal distribution and discontinuities in market dynamics. In this context, jump-diffusion and pure jump processes, which have the capacity to explain the volatility smile in option pricing and produce more realistic results in risk management, are examined. The theoretical foundations of these models and their advantages in financial modeling are discussed in detail.

Keywords: Quantitative Finance, Lévy Processes, Jump-Diffusion Models, Pure Jump Processes, Brownian Motion, Financial Modeling.

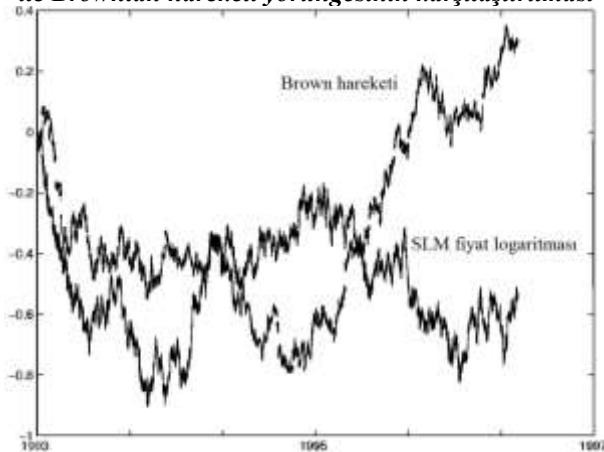
1. Giriş

Dünya genelinde 150'den fazla finansal piyasa yer almakta ve bu piyasalarda varlık fiyatlarının dinamik yapısı son yüzyılda yoğun bir şekilde matematiksel olarak modellenmeye çalışılmaktadır. İlk çalışmalarda, fiyat değişimlerindeki sürekliliği ve normal dağılım özelliklerini temel alan Brownian hareketine dayanan modeller ön plana çıkmaktadır (Bachelier, 1900). Modern finans matematiği temellerini oluşturan bu yaklaşım, ilerleyen dönemlerde Black ve Scholes'un (1973) opsiyon fiyatlama modeliyle standart bir forma dönüştürülmüştür. Ayrıca, 1970'lerin başlarından itibaren yapılan ampirik araştırmalarda, finansal getirilere ait dağılımların çarpık ve ağır kuyruklu oldukları; bunun yanı sıra bu dağılımların volatilité kümelenmeleri barındıran ve genellikle sıçramalı bir yapıya sahip oldukları görülmektedir.

Fiyatlandırma ve fiyatların modellenmesi için kullanılan rastgele süreçler evreninde en önemlisi kuşkusuz Brownian hareketidir. Brownian hareketi ve finansal modelleme, başından beri ayrılmaz bir şekilde bağlantılıdır.

Şekil 1'de 1993-1996 dönemi için SLM (NYSE) hisse fiyatı logaritmasının gelişimi ile aynı verimlilik ve volatilitéye sahip tipik bir Brownian hareketi yörüngesinin karşılaştırılması verilmiştir.

Şekil 1. 1993-1996 dönemi için SLM (NYSE) hisse fiyatı logaritmasının gelişimi ile Brownian hareketi yörüngesinin karşılaştırılması

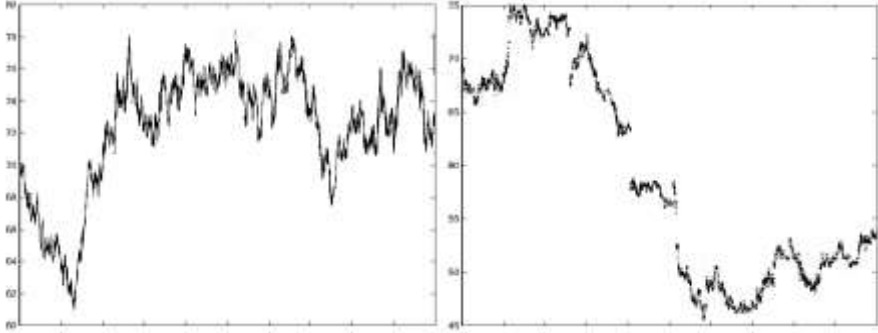


Brownian hareketinin önemli bir özelliği, örnek yörüngelerinin sürekliliğidir. $t \rightarrow B_t$ yörüngesi zamanın sürekli bir fonksiyonudur. Ancak

hisse senedi piyasası verilerine dayalı ampirik kanıtlar, Brownian hareketinin aksine, fiyat yörüngesinde süreksizlikler olarak görünen sıçramaların varlığını göstermiştir. Şekil 1, SLM hisse senedi fiyatında Brownian hareketinin aksine, fiyat yörüngesinde ani sıçramaların olduğu bir dönemi göstermektedir.

Brownian hareketinin bir diğer önemli özelliği ölçekleme değişmezliğidir (Scale invariance). Brownian hareketinin özellikleri tüm zaman dilimlerinde aynıdır.

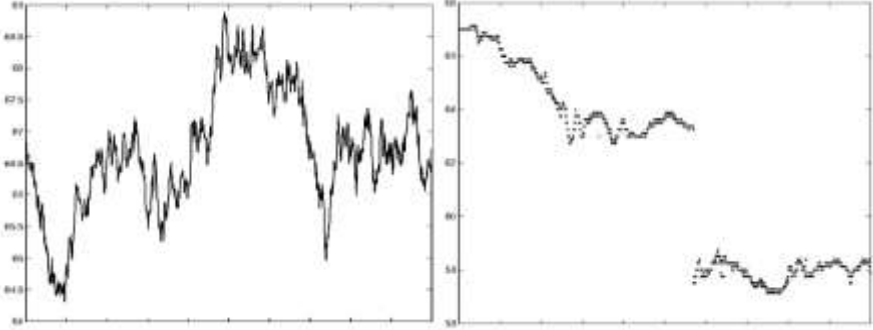
Şekil 2. 1993 Ocak-Mart dönemi için SLM (NYSE) hisse fiyatı logaritmasının gelişimi ve Black-Scholes modelinin karşılaştırılması



Şekil 2, önceki diyagramın üç yıllık periyodunun ilk çeyreğinin (1993 Ocak-Mart dönemi) yakınlaştırılmış halini göstermektedir. Şekil 2 incelendiğinde, (soldaki şekil) Brownian yörüngesinin, Şekil 1'deki eğriye benzediği, ancak (sağdaki şekil) hisse senedi fiyatının gelişimi, ölçekleme değişmezliğinin aksine sıçramaların daha görünür olduğu dikkat çekmektedir. Fiyatların davranışına daha yakından bakıldığında, farklılıkların daha belirgin hale geldiği görülmektedir.

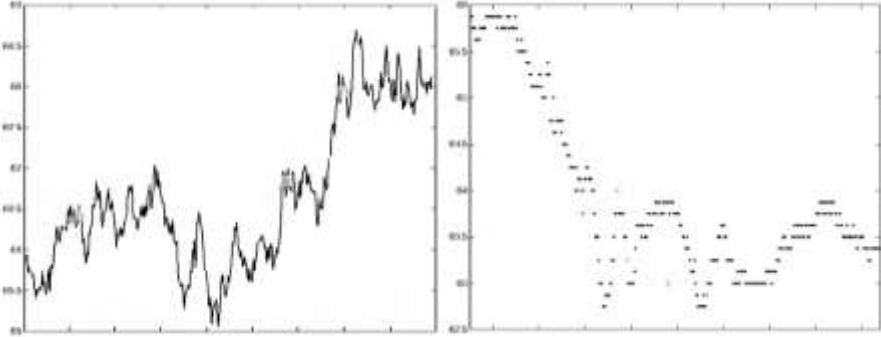
Şekil 3, SLM'nin Şubat 1993'teki bir aylık dönemdeki gelişimi ile aynı zaman dilimindeki Brownian hareketi yörüngesinin karşılaştırılmasını göstermektedir.

Şekil 3. Şubat 1993 için SLM (NYSE) fiyat davranışı ile aynı volatilitéye sahip Black-Scholes modelinin karşılaştırılması



Şekil 3 incelendiğinde, Brownian yörüngeleri üç yıllık ve üç aylık dönemlerde benzer görünse de, bu süre zarfında gerçek piyasa fiyatlarının davranışı aşağı yönlü büyük sıçramalar içerirken, Brownian modeli sürekli davranışını sürdürmektedir.

Şekil 4. 11 Şubat 1993 tarihi için SLM (NYSE) fiyat davranışını ile aynı volatilitéye sahip Black-Scholes modelinin karşılaştırılması



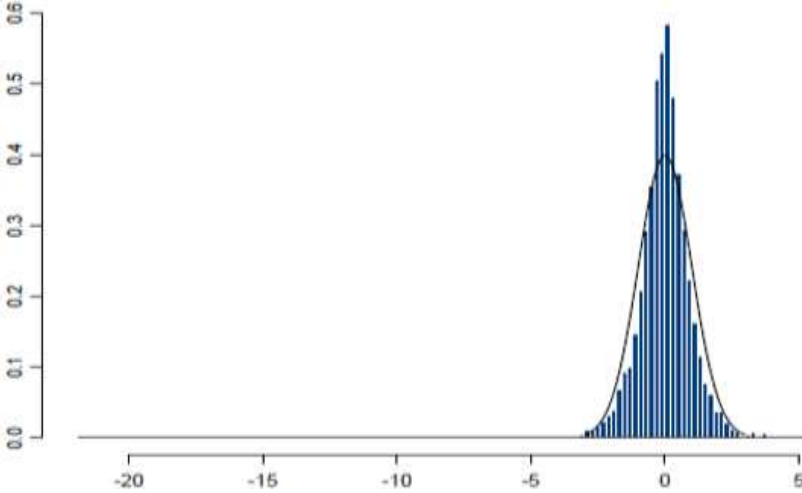
Son olarak, Şekil 4'te 11 Şubat 1993 için model karşılaştırmaları verilmiştir. Burada verilen günlük karşılaştırmaya dikkat edildiğinde, fiyat hareketinin sadece sıçramalarla olduğu, Brownian modelinin ise ufuk boyunca sürekli davranışını sürdürdüğü görülmektedir.

Bu nedenle gerçek verilere daha uyumlu olabilecek modellerin geliştirilmesi gerekliliği gündeme gelmiştir (Cont ve Tankov, 2004). Bu durumlar, klasik difüzyon modellerinin finans verilerini açıklamada önemli sınırlılıklara sahip olduğunu göstermiştir. Bunun sonucunda ise finansal modellemenin merkezine; Lévy süreçleri, sıçrama-difüzyon modelleri, pure sıçrama modelleri ve zaman değiştiren Lévy süreçleri yerleşmiştir (Schoutens, 2003; Cont ve Tankov, 2004; Tankov, 2004).

Finansal modellemede, Lévy süreçlerini kullanmanın temel motivasyonu, varlık getirisi dağılımına daha iyi uyum sağlamasıdır. Örnek olarak S&P 500 endeksinin günlük getirisi ele alınmış ve Şekil 5’de maksimum ve minimum günlük normal getiri sırasıyla 7.9967 ve -21.1550 civarında olduğu gözlemlenmiştir.

Şekil 5’de Haziran 1980’den 31 Aralık 2005’e kadar S&P 500 endeksinin günlük getiri histogramı verilmiştir. Bu grafikte yoğunluk $N(0,1)$ şeklinde belirlenmiştir.

Şekil 5. Haziran 1980-31 Aralık 2005 S&P 500 endeksinin günlük getiri histogramı



Z standard normal dağılımı kullanıldığında, $P(Z < -21.1550) \cong 4 \times 10^{-107}$ olmaktadır. Böyle bir olayın 15 trilyon yılda bir gerçekleşmesi gerektiği gibi bir dünya yaşamı ile karşılaşmakta ve 25 yıllık bir süreçte meydana geldiği gözlemlenmektedir. Açıkça, S&P 500 endeksinin normal günlük getirisi olan Şekil 5’teki histogram, daha uzun süreli zirveler ve iki belirgin asimmetrik kuyruk göstermektedir. Uzatılmış dağılım, normal dağılıma göre daha fazla basıklığa sahiptir. Bu, uzun bir zirve ve daha belirgin bir kuyruk sergilemektedir.

Black-Scholes gibi finansal piyasaların getiri sürecinin klasik modeli log-normal difüzyon sürecini içermektedir. Bu süreçlerin getirilerinin logaritması normal bir dağılıma sahiptir. Ancak bazı durumlarda gerçek piyasalar bu ideal modelden sapmaktadır. Piyasa verilerinin, log-normal modelde bulunmayan bazı daha gerçekçi özellikleri dikkate alması gerekmektedir. Hisse senedi piyasalarının getirilerinin logaritmasındaki

sıçrama ve pure sıçrama süreçlerini barındırmaktadır. Ayrıca, piyasa fiyatları sürecinde dağılımın daha uzun olduğu ve kuyrukların daha kalın olduğu gerçeği, normal dağılım modeline uymamaktadır. Bu ampirik gözlemlere dayanarak, bu yeni özellikleri modellemek için Lévy süreci gibi sıçramalı en basit Markov modeli kullanılmıştır (Hanson ve Westman, 2002).

Lévy süreçleri, sürekli ve süreksiz bileşenler barındıran geniş bir stokastik süreç sınıfını temsil etmektedir. Bu süreçler bağımsız ve durağan artışlara sahip olduklarından finansal getirilerin ampirik özelliklerini modellemek için çok iyi bir esneklik sağlamaktadır. Bundan dolayı, modern nicel finans literatüründe varlık getirilerinin incelenmesinde standart Brownian hareketinin yerine Lévy süreçlerinin kullanılması hem teorik hem de ampirik açıdan bir zorunluluk oluşturmaktadır (Breiman, 1968; Karatzas ve Shreve, 1998; Protter, 2005).

Sıçramalı modeller, varlık fiyatlarının sürekli dalgalanmaların yanı sıra ani ve büyük değişimlerle de karakterize edildiği gerçeğini dikkate almaktadır. Bu modellerin gerekliliği aşağıda verilen teorik ve ampirik temellere dayanmaktadır.

✓ *Ampirik bulgular sıçramaların varlığını açıkça gösterir:* İlk Press (1967) tarafından finansal varlıkların bileşik Poisson süreçleri ile iyi; daha sonra Merton (1976) tarafından, sıçramalı fiyat modelleri geliştirilerek varlık getirilerinin dağılım özelliklerinin çok daha iyi temsil edilebileceği gösterilmektedir. Bu çalışmalar getirilerin; yüksek basıklıklı, ağır kuyruklu ve çarpık olduğunu ortaya koymaktadır (Eberlein ve Keller, 1995; Carr vd., 2002).

✓ *Opsiyon fiyatlamasında piyasa uyumsuzluklarını açıklar:* Black-Scholes modeli, örtük volatilité gülümsemesini açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Sıçramalı modeller (Merton, Kou Çift Üstel Modeli, VG, CGMY gibi), opsiyon fiyatlamasında çarpıklığı ve basıklığı kontrol edebildiklerinden piyasa fiyatlarıyla daha doğru eşleşmeler sağlamaktadır (Merton, 1976; Madan vd., 1998; Kou, 2002; Schoutens, 2003).

✓ *Risk yönetimi açısından daha gerçekçi bir yapı sunar:* Sıçrama bileşenleri; VaR hesaplamalarında, kuyruk risk değerlendirmelerinde ve stres senaryolarında ölçümlerin gerçekçi olmasını sağlamaktadır (Eberlein vd., 1998).

✓ *Sonsuz aktivite modelleri mikro yapıyı daha iyi yakalar:* Finansal verilerde yüksek frekanslı değişimler, sonsuz aktiviteli modellerle daha doğru temsil edilebilmektedir. Örneğin CGMY ve VG gibi modeller; yüksek

frekanslı fiyat değişimlerini, işlem mikroyapısını ve piyasa gürültüsünü ya-kalamada olağanüstü esneklik sunmaktadır (Koponen, 1995; Schoutens, 2003).

Bu bölümde, iki süreç kategorisi olan sıçrama-difüzyon süreçleri ve pure sıçrama (pure jump veya saf sıçrama) süreçleri detaylı bir şekilde ele alınmaktadır.

2. Sıçrama-Difüzyon Süreçleri

Finansal varlık fiyatlarının davranışları, sürekli ve küçük dalgalanmaların yanı sıra ani ve büyük değişimlerle de karakterize edilmektedir. Black–Scholes gibi geleneksel difüzyon modelleri, fiyat sürecinin sürekli olduğunu varsaymakta ve bu durum gerçek piyasa verilerindeki sıçramaları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle finansal matematikte sıçrama-difüzyon modelleri, Brownian hareketi kaynaklı sürekli oynaklığı ve Poisson tipi sıçramaları aynı yapıda birleştirerek fiyat dinamiklerini daha iyi temsil etmektedir (Merton, 1976; Cont ve Tankov, 2004). Ampirik kanıtların sürekli örneklem yörüngelerini desteklemediği tezi 1975 yılında Merton tarafından ortaya atılmaktadır. Merton, hisse senedi fiyatının sürekli bileşenini Wiener süreci olarak temsil edebilecek bir süreçle birlikte sıçrama bileşenini ifade etmek için Poisson sürecini tanımlamaktadır. Burada, hisse senedi verilerinin giriş oranı, Poisson dağılımına sahip bir olayla ifade edilmektedir. Bu olayların bağımsız ve düzgün dağıldığı varsayılmaktadır.

Bu nedenle, sıçrama-difüzyon süreci, sıçrama süreci ile difüzyon sürecinin bir kombinasyonu olarak tanımlanmaktadır. Aslında, sıçrama-difüzyon süreci, bir Black-Scholes modeline sıçrama eklenmesiyle oluşmaktadır. Gerçek piyasa verilerinin küçük dalgalanmaları ve ani sıçramaları birlikte içerdiği göz önüne alındığında, Difüzyon+Sıçrama bileşenlerinin birlikte kullanılması kaçınılmazdır. Bu süreçler genellikle;

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

gibi ifade edilmektedir. Burada γ , deterministik trendi; σ , difüzyon volatilitesi; W_t , Brownian hareketini; N_t , Poisson sürecini ve Y_i , sıçrama büyüklüğünü göstermektedir. Böylece, Brownian hareketi ile sürekli ve

Poisson sıçramaları ile ani değişimler tek bir stokastik modelde bütünleşmektedir (Hanson ve Westman, 2002).

Sıçrama-difüzyon süreçlerinin genel özellikleri aşağıda maddeler halinde sunulmuştur.

✓ *Süreksizlik*: Sıçrama-difüzyon süreçlerinde örnek yörüngeleri caddlag yapıya sahip olduğundan sağdan sürekli ve soldan limitlidir. Bu yapı, gerçek fiyat serilerinin yüksek frekanslı davranışlarına uygundur (Cont ve Tankov, 2004).

✓ *Karma süreç yapısı*: Süreç sürekli ve süreksiz bileşenler içerdiğinden difüzyon (küçük dalgalanmalar) ve sıçramalar (büyük ve ani hareketler) barındırmaktadır. Bu yapı, sadece difüzyon veya sadece sıçrama modellerine göre çok daha esnek bir yapı sunmaktadır (Schoutens, 2003).

✓ *Ağır kuyruklu davranış*: Sıçrama bileşeni, dağılım kuyruklarını önemli derecede ağırlaştırmaktadır. CGMY, VG, NIG gibi modellerin çıkışı bu ampirik gereksinime dayanmaktadır (Madan vd., 1998; Carr vd., 2002).

✓ *Volatilite gülümsemesini açıklayabilme*: Sıçramalar fiyat sürecine asimetri ve ekstra varyans eklediği için örtük volatilite eğrilerinin Black–Scholes’e göre daha gerçekçi bir şekilde elde edilmesini sağlamaktadır (Ramezani ve Zeng, 1999).

✓ *Ani bilgi şoklarını modelleyebilme*: Ekonomik veriler, politik açıklamalar ve sistemsel risk olayları piyasada büyük sıçramalar yaratabilmektedir. Sıçrama-difüzyon modelleri bu tür olayları matematiksel olarak temsil edebilen ender modellerdir (Merton, 1976).

2.1. Merton Sıçrama-Difüzyon Modeli

Finansal varlık getirilerinin sürekli küçük dalgalanmalardan ibaret olmadığı, bunun yanı sıra ani ve büyük hareketler içerebileceği fikrinden hareketle ilk sıçrama-difüzyon modeli Merton (1976) tarafından geliştirilmiştir. Brownian hareketi ve bileşik Poisson sürecini birleştirerek, sıçramalı difüzyon sürecinin en basit şekli oluşturulmaktadır. Bu model, Poisson sıçramaları ve Brownian hareketi temelli difüzyonu bir araya getirerek finansal fiyat dinamiklerinin daha gerçekçi biçimde temsil edilmesini sağlamaktadır. Fiyatların normal gelişimi, rastgele zamanlarda sıçramaların gerçekleştiği difüzyon süreci tarafından belirlenmektedir. Bu

sıçramaların sayısı nadir ve büyük olaylar ve değişiklikler nedeniyle ortaya çıkmaktadır.

Merton'un sıçrama-difüzyon süreci;

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada W_t , Wiener sürecini; N_t , yoğunluğu λ olan Poisson sürecini; Y_i , sıçrama büyüklüğünü göstermektedir. Merton sıçrama-difüzyon süreci, sıçrama-difüzyon süreçleri kategorisinin en ünlü modeli taramalı Lévy süreçleri ailesindedir (Tankov, 2004).

Merton modelindeki X_t fiyat logaritma süreci için sıçrama büyüklüğü $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$ şeklinde normal dağılımla tanımlanmaktadır. Merton modelindeki süreksizliklerin (sıçramaların) rastgele sayısı koşulu altında olasılık dağılımı;

$$P\{X_t \in A\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_t \in A | N_t = k\} P\{N_t = k\}$$

şeklinde ve X_t olasılık yoğunluğu ise;

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\left\{-\frac{(x - \gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\sigma^2)}\right\}}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\sigma^2)}}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Drifti dikkate alınmadan Merton modeli 4 parametreden oluşmaktadır. Burada; σ difüzyon volatilitesi, λ sıçrama ölçüsünü, μ sıçrama değerinin ortalamasını ve δ sıçrama değerinin standart sapmasını ifade etmektedir.

Merton modelinde Lévy yoğunluğu;

$$v(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\delta^2}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Sıçrama-difüzyon modellerinde Fourier dönüşüm tekniklerinin kullanılabilmesi için karakteristik fonksiyonun kritik önemi bulunmaktadır (Carr ve Madan, 1998). Lévy-Khinchin temsiline ve Merton modelindeki sonlu sıçrama sayısına göre Merton karakteristik fonksiyonu;

$$\phi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\gamma u + \lambda \left\{ e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\mu u} - 1 \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır (Merton, 1976). Karakteristik fonksiyondaki son terimi büyük sıçramalardan dolayı sonlu olmaktadır.

Merton modelinde log-fiyat süreci deterministik trend (γt), difüzyon bileşeni (σW_t) ve sıçrama bileşeni ($\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$) bileşik bileşenler yapısından oluşmaktadır. Bu yapı;

$$E[X_t] = t(\gamma + \lambda\mu)$$

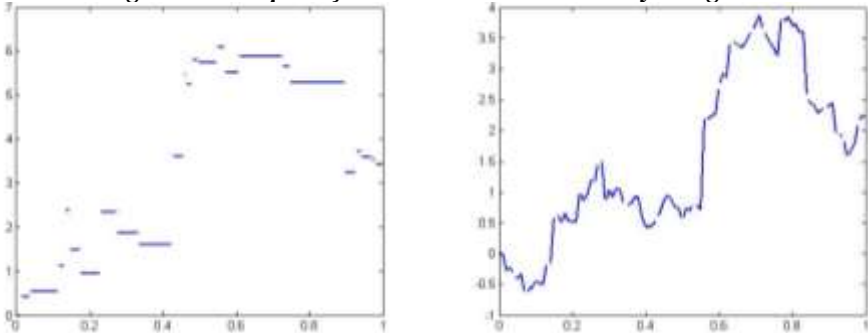
ve

$$VarX_t = t(\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2)$$

şeklinde Merton modelinin beklenen ve varyans değerlerini sağlamaktadır. Bu durum, sıçrama bileşeninin varyansa yaptığı katkıyı göstermektedir. Burada; difüzyon bileşeninin varyansı lineer yapıda ve sıçrama bileşeninin varyansı ise Poisson + Normal karışımı bir yapıdadır. Böylece, varlık getirilerinin Poisson karışımı normal dağılımlı olduğu söylenebilir (Press, 1967). Merton olasılık yoğunluğundaki kuyruklar, Gauss modelinden daha ağır ve bu modelin tüm üstel momentleri sonludur (Merton, 1976; Cont ve Tankov, 2004).

Şekil 6'da, sıçrama değerleri ve Merton sıçrama-difüzyon süreci için Gauss dağılımına sahip bileşik Poisson sürecinin örnek yörüngeleri gösterilmektedir.

Şekil 6. Sıçrama değerleri ve Merton sıçrama-difüzyon süreci için Gauss dağılımına sahip bileşik Poisson sürecinin örnek yörüngeleri



Şekil 6'da soldaki grafikte, Gauss dağılımına sahip bileşik Poisson sürecinin sıçrama değerlerine ait örnek yörünge ve sağdaki grafikte ise

Merton sıçrama-difüzyon sürecinin örnek yörüngesi (Brownian hareketi + bileşik Poisson) görülmektedir.

Merton modelinde getiriler, Poisson karışımı normal dağılımı verirken; dağılım ise yüksek basıklık, çarpıklık ve ağır kuyruklar üretmektedir (Eberlein ve Keller, 1995; Carr vd., 2002).

Merton modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

- ✓ Matematiksel olarak yönetilebilir olması,
- ✓ Volatilité gülümsemesini açıklayabilmesi,
- ✓ İktisadi yorumunun güçlü olması modelin avantajlarıdır (Merton, 1976).

Ayrıca,

- ✓ Normal dağılımlı sıçramalar büyük hareketleri açıklamada yetersiz kaldığından kuyrukların yeterince ağır olmaması (Ramezani ve Zeng, 1999),
- ✓ Ek parametreler ($\sigma + \lambda\delta + \lambda\mu$) karmaşıklığı artırdığından kalibrasyon zorlukları ve
- ✓ Asimetri kapasitesinin sınırlı olması ise modelin sınırlılıklarıdır.

Bu modelde, normal dağılım çarpıklık oluşturmadiğından Kou ve VG modelleri geliştirilmiştir.

2.2. Kou (Çift Üstel) Sıçrama-Difüzyon Modeli

Çift üstel sıçrama dağılımına dayanan yeni bir sıçrama-difüzyon modeli Kou (2002) tarafından geliştirilmiştir. Bu model de, Merton modeline benzer şekilde, varlık fiyatlarının logaritması, bir Brownian hareketi ve bir bileşik Poisson sürecin toplamından oluşmaktadır. Bu modelde, sıçrama değerleri çift üstel bir dağılıma sahiptir. Modelin, Merton modelinden farkı, momentlerinin daha kolay hesaplanabilir olmasıdır. Zira Merton'un normal dağılımlı sıçrama varsayımının finansal piyasalarda gözlenen çarpıklık ve ağır kuyruk davranışını yeterince açıklayamadığı belirtilmektedir. Geliştirilen yeni model, sağ ve sol kuyrukların üstel biçimde ağırlaşmasını sağlayarak gerçek piyasadaki ani düşüş ve yükselişleri daha hassas biçimde yakalamaktadır (Kou, 2002). Özellikle örtük volatilité gülümsemesi, fiyat çöküşleri, haber duyurularına verilen ani tepkiler gibi davranışların

modellenesinde Merton'a kıyasla daha başarılı sonuçlar sunmaktadır (Ramezani ve Zeng, 1999; Cont ve Tankov, 2004).

Modelin matematiksel yapısı ve sıçrama miktarı;

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y \geq 0} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y < 0}$$

gibi asimetrik bir çift üstel dağılıma sahiptir. Burada, η_1 pozitif sıçrama değerlerinin dağılımı için bir parametre, η_2 negatif sıçrama değerlerinin dağılımı için bir parametre, $p, q \in [0,1]$ ise yukarı ve aşağı sıçrama olasılıklarını göstermektedir. σ , difüzyon volatilitesi; λ , sıçrama ölçüsü; η_1 , pozitif sıçrama değeri için dağılım parametresi; η_2 , negatif sıçrama değeri için dağılım parametresi; p ve q , sıçrama değerlerinin yönünü ve olasılığını belirleyen parametreler olmak üzere Kou modelinin beş parametresi bulunmaktadır. Sıçramaların Lévy yoğunluğu;

$$v(x) = p\lambda\eta_1 e^{-\eta_1 x} 1_{x \geq 0} + q\lambda\eta_2 e^{\eta_2 x} 1_{x < 0}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu yoğunluk Cont ve Tankov (2004)'un sınıflandırmasında “sonlu aktivite Lévy süreçleri” sınıfına girmektedir. Çift üstel dağılımın, sıçrama değerinin dağılımının genişletilmiş olması ve bu dağılımın benzersiz bir özelliği olan belleksiz (hafızasız) olması şeklinde iki ilginç özelliği bulunmaktadır. Bu özellikler, opsiyon fiyatlandırma gibi konularda analitik çözümler sunmaktadır. Çift üstel sıçrama difüzyon modelinin Merton sıçrama difüzyon modeline göre piyasa verilerine daha iyi uyulanabildiği gösterilmiştir (Ramezani ve Zeng, 1999; Kou, 2002).

Kou modelinin karakteristik fonksiyonu;

$$\phi(u) = \exp\left(iu\mu^*t - \frac{1}{2}\sigma^2u^2t + \lambda t\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 - iu} - 1\right)\right)$$

şeklinde. Burada $\mu^* = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa$ ile elde edilmektedir (Kou, 2002).

Kou modelinin sıçrama bileşeni pozitif ve negatif yönde ağır kuyruklar üretmektedir. Bu nedenle Kou modeli; asimetrik dağılım, yüksek basıklık ve ağır kuyruk özelliklerini aynı anda sağlayabilmektedir (Eberlein ve Keller, 1995; Carr vd., 2002)

✓ *Asimetri modelleme yeteneği*: Finansal piyasalarda negatif şoklar genellikle pozitif şoklara göre daha büyük olup bu durum $\eta_1 \neq \eta_2$ ve $p \neq 1/2$ ile modellenebilir.

✓ *Ağır kuyruk davranışı*: Üstel dağılım, normal dağılıma göre daha ağır kuyruklara sahip olduğundan Kou modeli, Merton modelinin açıklayamadığı büyük fiyat şoklarını başarıyla açıklayabilmektedir (Kou, 2002). Bunlar Kou dağılımının önemli davranışlarıdır.

Ayrıca, Kou modeli, opsiyon fiyatlaması açısından matematiksel olarak oldukça avantajlıdır. Çift üstel dağılım, moment oluşturma fonksiyonlarının kapalı formda olması nedeniyle; Avrupa opsiyonları için analitik çözümler, Amerikan opsiyonları için hızlı numerik yöntemler ve hızlı Fourier dönüşüm yöntemleri kolaylıkla uygulanabilmektedir (Carr ve Madan, 1998; Kou, 2002). Kou modelinin opsiyon fiyatlamada Black–Scholes ve Merton modellerine göre çok daha iyi kalibrasyon performansı gösterdiği deneysel olarak ortaya konulmuştur.

Bu modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

✓ *Ağır kuyruk kapasitesi*: Üstel dağılımın normal dağılıma göre daha ağır kuyruk oluşturmaya,

✓ *Asimetriyi modelleyebilmesi*: $\eta_1 = \eta_2$ pozitif/negatif şok asimetrisi elde edilmesi,

✓ *Kapalı form ifadeleri*: Karakteristik fonksiyon, yoğunluk ve fiyatlama formüllerinin kapalı formda olması ve

✓ *Gerçekçi haber şoku yapısı*: negatif haberlerin sert fiyat düşüşleri yaratabilmesi ve modelin bunu açık biçimde temsil etmesi modelin avantajlarındandır.

✓ *Sonsuz aktiviteyi modelleyememesi*: Kou modeli sıçrama sayısını sonlu kabul etmektedir. Bu nedenle, yüksek frekanslı finans verilerini tam temsil etmemektedir (Carr vd., 2002).

✓ *Sıçramaların üstel dağılımı bazı durumlarda yetersiz kalması*: CGMY veya VG gibi modeller daha ağır kuyruklar üretebilmektedir.

✓ *Kalibrasyon metriklerinin parametre sayısını arttırması*: modelde $p, \eta_1, \eta_2, \lambda$ olmak üzere dört sıçrama parametresi bulunmaktadır. Bunlarda modelinin sınırlılıklarını oluşturmaktadır.

3. Pure Sıçrama Süreçleri

Bu başlıkta pure sıçrama süreçleri ve sonsuz aktiviteli Lévy süreçleri ele alınacaktır. Bazı Lévy süreçleri her aralıkta sonsuz sayıda sıçramaya sahip olduklarından Lévy süreçleri yalnızca sıçrama-difüzyon süreçleriyle sınırlı değildir. Pure sıçrama süreçlerinde, çoğu sıçrama çok küçük değerlere sahip ve yalnızca sınırlı sayıda büyük sıçrama içermektedir. Pure sıçrama süreci ilk kez sonlu aktiviteli bir pure sıçrama süreci incelenerek 1976'da Cox ve Ross tarafından tanıtılmıştır. Ancak sonraki çalışmalar, finansal piyasa verileriyle daha uyumlu olan sonsuz aktiviteli süreçlere odaklanmıştır. Hisse senedi fiyat hareketlerini modellemede sıçrama bileşeninin önemi vurgulanmıştır. Ampirik kanıtlar, hisse senedi piyasalarında gözlemlenen fiyatların logaritmasının Lévy pure sıçrama süreçleri modelleri ile daha iyi uyum gösterdiğini göstermektedir. Geman vd. (2001)'de, finansal varlık fiyatlandırma süreçlerinde bir sıçrama bileşeni olduğunda sürekli olarak meydana gelen küçük hareketleri ifade eden difüzyon bileşenine gerek olmadığını ileri sürmektedir. Sıçramaların, zaman zaman meydana gelen büyük hareketleri göstermek için gerekli olduğu ifade edilmektedir. Bu süreçlerde Brownian bileşeni bulunmadığından deneyler, bu modellerin genellikle bir difüzyon bileşeni eklenerek iyileştirilemediğini göstermektedir.

Pure sıçrama süreçleri, stokastik sürecin hiçbir sürekli difüzyon bileşeni içermediği, tüm dinamiklerin sıçramalar tarafından belirlendiği Lévy süreçleri sınıfıdır. Brownian hareketinin olmadığı bu süreçlerde tüm varyans ve dinamik yapı, sıçramaların frekansı, şiddeti ve Lévy ölçüsünün formu tarafından belirlenmektedir (Schoutens, 2003; Cont ve Tankov, 2004). Bu sınıf, özellikle finansal piyasalarda yüksek frekanslı verilerin ve mikro yapının modellenmesi açısından önemlidir. Ampirik olarak, getirilerin süreklilikten çok sonsuz aktivite içeren sıçramalarla daha iyi temsil edildiği saptanmıştır (Carr vd., 2002).

Pure sıçrama modelleri hiperbolik dağılımlardan CGMY'ye kadar geniş bir literatürü kapsamakta ve modern nicel finansın en esnek araçlarını oluşturmaktadır.

$(X_t)_{t \geq 0}$, pure sıçrama süreci olarak tanımlanmakta ve bu süreç;

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n < t) Z_n$$

ile ifade edilmektedir. Bu süreç sağ-sürekli ve parçalı sabit bir süreç olup, burada; T_n , n . zaman sıçraması ve Z_n , n . sıçrama değerini göstermektedir.

Pure sıçrama modellerde Lévy ölçüsü en kritik bileşendir. Lévy ölçüsü; sıçramaların hangi yoğunlukta, hangi büyüklüklerde ve hangi kuyruk davranışıyla oluştuğunu belirlemektedir. Pure sıçrama modelleri arasındaki tüm fark, Lévy ölçüsünün seçimine dayanmaktadır. Bu modellere örnek olarak; hiperbolik süreç (hiperbolik yoğunluk), NIG (modifiye Bessel fonksiyonlu yoğunluk), VG (Gama karışımı Brownian hareket) ve CGMY (parametrik ağır kuyruk yapısı) modelleri verilebilir. Bu modellerin her biri, farklı finansal veri özelliklerini yakalamak için geliştirilmiştir (Eberlein ve Keller, 1995; Madan vd., 1998; Carr vd., 2002).

Pure sıçrama süreçlerinin teorik ve ampirik özellikleri detaylı olarak ele alınmaktadır. Bu sürecin genel özellikleri aşağıda sunulmuştur.

✓ *Süreç tamamen sıçramalardan oluşmaktadır:* Brownian hareketi bulunmadığından fiyat yollarının caddlag olduğu, varyans sıçramalardan oluştuğu ve volatilité davranışı Lévy ölçüsünün kuyruklarına göre belirlendiği bilinmektedir. Bu özellik, özellikle zaman değiştiren modellerle birleştiğinde finansal volatilité kümelenmesini temsil etmede kritik bir rol oynamaktadır (Geman vd., 2001).

✓ *Sonsuz aktivite:* Birçok pure sıçrama modelinde birim zamanda sonsuz sayıda küçük sıçrama gerçekleşmektedir. CGMY, VG ve NIG süreçleri bu sınıfta yer almaktadır. Bu özellik yüksek frekanslı finansal verilerde mikro dalgalanma, fiyat yoğunluğu ve işlem bazlı hareketler için gereklidir (Carr vd., 2002).

✓ *Sonsuz/sonlu varyans yapısı:* Pure sıçrama süreçlerinden CGMY ve bazı stabil süreçler sonsuz varyanslı modeller VG ve hiperbolik dağılımlar ise sonlu varyanslı modeller şeklinde sınıflanabilir. Bu ayrım, modelin kuyruk yapısını ve fiyatlamadaki performansını doğrudan etkilemektedir.

✓ *Ağır kuyruk yapısı:* Pure sıçrama modeller piyasa verilerinde gözlenen ağır kuyruk davranışını doğal olarak üretmektedir. Örneğin: hiperbolik dağılımlar, hiperbolik kuyruk; NIG, Bessel fonksiyonlu üst kuvvetli ağır kuyruk ve CGMY, en esnek kuyruk sınıfına girmektedir. Bu

özellik Black–Scholes modelinin açıklayamadığı nadir ama büyük fiyat hareketlerini modellemekte önemlidir (Eberlein vd., 1998).

✓ *Fourier yöntemleri ile etkin fiyatlama*: Pure sıçrama süreçlerin karakteristik fonksiyonları genellikle kapalı formdadır. Bu özellik Carr ve Madan (1998) tarafından geliştirilen hızlı Fourier dönüşümü fiyatlama metodunun uygulanmasını mümkün kılmaktadır. Bu nedenle VG, NIG ve CGMY modellerin endüstride büyük kullanım alanları bulunmaktadır.

Pure sıçrama modeller; opsiyon fiyatlaması, risk yönetimi, risk yönetiminde stres analizi, portföy optimizasyonu ve yüksek frekanslı işlem analizleri gibi alanlarda kullanılmaktadır. CGMY ve VG modelleri özellikle pratik fiyatlama algoritmalarında endüstri standardı hâline gelmiştir (Madan vd., 1998; Carr vd., 2002).

Pure sıçrama modellerinin, difüzyon modellerine göre birçok avantajının yanı sıra bu sıçrama modellerinin bazı sınırlılıkları da bulunmaktadır. Bu modllerin avantajları,

✓ *Ampirik uyumun çok daha güçlü olması*: Piyasa getirilerinin ağır kuyruk, asimetri ve volatilité kümelemesi gibi özellikler pure sıçrama modellerle daha iyi yakalanmaktadır (Carr vd., 2002),

✓ *Volatilité gülümsemesini doğal olarak açıklayabilmesi*: Difüzyon bileşeni olmadan bile örtük volatilitédeki çarpıklık ve basıklık başarıyla modellenmektedir,

✓ *Esnek kuyruk yapısı*: Her model türü (NIG, VG, CGMY, Hiperbolik), farklı kuyruk davranışlarını temsil edebilmektedir ve

✓ *Fourier yöntemleri ile hızlı fiyatlama yapılması*: Pure sıçrama modellerin karakteristik fonksiyonları kapalı formda olduğundan hızlı Fourier dönüşüm yöntemleri doğrudan uygulanabilmektedir (Carr ve Madan, 1998) şeklinde sıralanabilir.

Sınırlılıkları ise,

✓ *Ek parametre sayısının artması*: Pure sıçrama modellerinde genellikle 3–4 ek parametre bulunmaktadır. Bu durum kalibrasyonu zorlaştırabilir.

✓ *Yoruma dayalı karmaşıklık*: Her parametrenin finansal yorumu modelden modele değişmektedir.

✓ *Hesaplama maliyetleri:* Kapalı form karakteristik fonksiyonlara rağmen bazı modellerde integral çözümleri ağır olabilmektedir, şeklinde sıralanabilir.

3.1. Hiperbolik Model

Hiperbolik dağılımlar ve hiperbolik Lévy süreçleri, finansal zaman serilerinin ağır kuyruklu ve çarpık yapısını modellemede önemli bir araç olup, ilk olarak Eberlein ve Keller (1995) tarafından finansal veri analizinde sistematik bir şekilde uygulanmıştır. Bu dağılım ailesi, klasik Gauss dağılımına göre çok daha esnek olup, özellikle simetrik olmayan ağır kuyruklar, yüksek basıklık, ve çift taraflı kontrol edilebilir kuyruk davranışı sunmaktadır (Eberlein ve Keller, 1995; Eberlein vd., 1998). Hiperbolik süreçler, difüzyon bileşeni olmayan pure sıçrama Lévy süreçleri içerisinde yer almakta ve varlık getirilerinin olasılık yoğunluğunun hiperbolik fonksiyonlarla tanımlanması esasına dayanmaktadır.

Hiperbolik model, hisse senedi getirilerine oldukça iyi uyum sağlamaktadır. Ancak, hiperbolik modeli kullanmak, Brownian hareketi kadar basit değildir. Bu model, finans matematiğinde tanıtılan ilk pure sıçrama modellerinden biridir. Volatilitiyi sabit kabul eden Black-Scholes ve Merton formülünden farklı olarak, bu modellerde volatilité rastgele bir süreçtir (Hull, 2001). Finansal veri modellemede üç alt kategori içinde geliştirilmiş hiperbolik süreçler kullanılmaktadır. Eberlein ve Keller (1995) tarafından kullanılan hiperbolik süreç, Barndorff-Nielsen tarafından ortaya atılan normal ters Gauss süreci ve gama varyans süreci, finansal verileri modellemek için kullanılan geliştirilmiş hiperbolik süreçler arasında yer almaktadır (Schoutens, 2003). Hiperbolik dağılım adı, yoğunluğunun logaritmasının bir hiperbol olmasından gelmektedir (Cont ve Tankov, 2004).

Barndorff-Nielsen ve Halgreen, hiperbolik dağılımın sonsuz bölünebilir olduğunu kanıtlamaktadır (Carr ve Wu, 2002). Bu nedenle, hiperbolik dağılım $(X_t)_{t \geq 0}$ Lévy sürecini, yani bağımsız ve sabit büyümeleri olan bir süreci oluşturabilmekte, bu dağılımın yoğunluğu;

$$f(\alpha, \beta, \delta, \mu)(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right).$$

ile ifade edilmektedir. $(X_t)_{t \geq 0}$ hiperbolik hareket süreci, $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ şeklinde dört parametreye bağlıdır. Burada $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ve $0 \leq |\beta| < \alpha$ durumu söz konusudur. $\alpha > |\beta|$, şekil parametresini, β çarpıklığı, δ ve μ ise ölçeği ve konumu göstermektedir. Bu parametreler, bağımsız bir gözlem örneği kullanılarak maksimum olabilmektedir. Lévy-Khinchin temsil teoremi kullanılarak hiperbolik hareketin pure sıçramalarla değişen bir süreç olduğu gösterilmektedir.

Hiperbolik dağılımın karakteristik fonksiyonu;

$$\varphi(x) = e^{i\mu u} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

ile gösterilmektedir. Bu fonksiyonun kapalı formda olması Fourier dönüşüm yöntemleri, hızlı Fourier dönüşümü tabanlı opsiyon fiyatlaması ve moment hesaplamaları için büyük avantaj sağlamaktadır (Carr ve Madan, 1998).

$g(x)$ hiperbolik Lévy ölçümü olmak üzere;

$$g(x) = \frac{1}{|x|} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2y+\alpha^2}|x|} dy}{\pi^2 y (J_1^2(\sqrt{2y}) + Y_1^2(\delta\sqrt{2y}))} + e^{-\alpha|x|} \right]$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, J_1 ve Y_1 , 1 indeksli birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. Buna göre simetrik merkezli durumdaki $\beta = \mu = 0$ 'ın karakteristik fonksiyonunun Lévy-Khinchin gösterimi ise;

$$\varphi(u) = \exp \left[\int_0^\infty (e^{iux} - 1 - iux) g(x) dx \right]$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu gösterimde, Lévy hiperbolik hareketinin sürekli kısmı olmadığı için pure sıçramalarla değişen bir süreç olduğu görülebilir. Bessel fonksiyonlarının özelliğini kullanarak, her $x \rightarrow 0$ için $g(x) \sim \frac{1}{x^2}$ olduğu sonucuna varılabilir. Bu nedenle, bu sürecin her yörüngesi, her sonlu zaman aralığında sonsuz sayıda sıçramaya sahiptir (Breiman, 1968; Eberlein ve Keller, 1995; Eberlein vd., 1998).

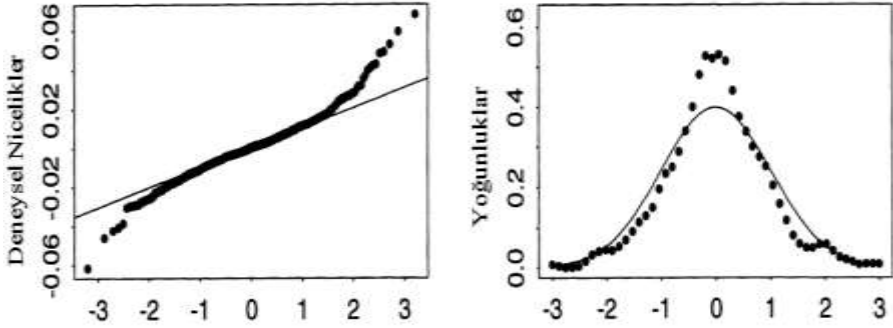
Bu ölçü, sonsuz aktivite içermekte, küçük sıçramaların çok yoğun olduğunu ve büyük sıçramaların hiperbolik hızla azaldığını göstermektedir.

Bu özellik hiperbolik modelleri, yüksek frekanslı finansal verilerin doğasını modellemede kullanışlı kılmaktadır.

Şekil 7, Deutsche Bank Germany'nin logaritmasının normal dağılımdan sapmasını göstermektedir. Deneyisel veriler, normal yoğunluğa kıyasla daha uzun bir tepe noktası ve daha ağır bir kuyruk göstermektedir.

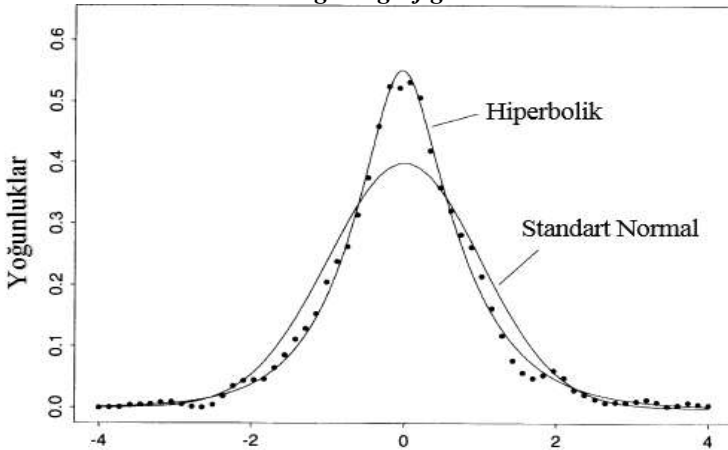
Şekil 7'deki soldaki grafik Almanya'da Deutsche Bank getirileri için normal QQ grafiğini ve sağdaki grafik ise Deutsche Bank getirileri için ampirik yoğunluk ile normal yoğunluk uyumsuzluğunu vermektedir. Şekil incelendiğinde, normallikten sapma açıkça görülmektedir.

Şekil 7. Deutsche Bank Germany'nin logaritmasının normal dağılımdan sapması



Şekil 8, Deutsche Bank Germany getirisinin logaritmasına uygunluğuna ait normal ve hiperbolik dağılımlar grafiğini vermektedir.

Şekil 8. Deutsche Bank'ın getiri yoğunluğu için normal dağılım ve hiperbolik dağılım grafiği



Şekil 8, hiperbolik dağılımın Deutsche Bank Germany getirisinin logaritmasına uygun olduğunu göstermektedir. Şekil incelendiğinde;

hiperbolik dağılımın, normal dağılıma göre verilere daha iyi uyum sağladığı görülmektedir.

Alman hisse senedi getirilerinin hiperbolik yoğunlukla uyum gösterdiğini gösteren Eberlein ve Keller (1995) hiperbolik modelin finansal ekonomideki önemini vurgulamışlardır. Finansal verilerde ve opsiyon fiyatlamasında hiperbolik modelin özellikleri:

- ✓ *Yüksek basıklık*: Hiperbolik dağılımlar, piyasalarda gözlenen “normalden daha sivri tepe” davranışını açıklamakta,
- ✓ *Ağır kuyruklar*: Getirilerin aşırı uçlardaki davranışını doğru modelleyebilmekte,
- ✓ *Asimetrik dağılım*: Beta parametresi pozitif-negatif yönlü şokların yoğunluğunu farklılaştırmakta ve
- ✓ *Log-getiri uyumunun güçlü olması*: Hiperbolik yoğunlukların log-getiriler üzerinde Gaussian yoğunluklara göre daha iyi performans göstermektedir (Eberlein vd., 1998), gibi özellikler ile öne çıkmaktadır.

Ayrıca bu süreçler; örtük volatilité gülümsemesini, uçlardaki fiyatlama anomalilerini ve stres dönemlerindeki ağır kuyruk davranışını başarıyla temsil etmektedir. Özellikle VaR hesaplamalarında hiperbolik dağılımların üstün performansı literatürde ortaya konulmaktadır (Eberlein vd., 1998).

Bu modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

- ✓ Çok esnek kuyruk davranışı,
- ✓ Asimetri parametresi sayesinde yönlü şokların modellenmesi,
- ✓ Kapalı form karakteristik fonksiyon ve
- ✓ Pure sıçrama yapısı sayesinde yüksek frekanslı veri uyumu gibi avantajlarının yanı sıra;
- ✓ Parametre sayısının yüksek olması,
- ✓ Kalibrasyonun zor olması ve

Endüstride VG ve CGMY’e göre daha az kullanılması gibi sınırlılıkları da bulunmaktadır.

3.2. Normal Inverse Gaussian (NIG) Modeli

Finans matematiği bağlamında, varlık getirilerinin logaritmik dağılımları, normal ters Gauss süreci ile iyi uyum sağlayabilmektedir. Bu

süreç, birçok uygulama alanında başarılı bir şekilde kullanılmıştır. İlk olarak 1995 yılında Eberlein ve Barndorff-Nielsen tarafından tanıtılan ve daha sonra 1998 yılında Barndorff-Nielsen tarafından finansal modelleme için önerilen NIG süreci, $\lambda = 1/2$ ile genelleştirilmiş hiperbolik süreçlerin alt kategorilerinden biridir.

Finansal getirilerin ağır kuyruklu ve çarpık istatistiksel özelliklerini modellemek için ideal bir pure sıçrama Lévy sürecidir (Schoutens, 2003). NIG dağılımı, özellikle yüksek frekanslı finansal verilerde gözlenen asimetri, yüksek basıklık ve kuyruk kalınlığı gibi ampirik özellikleri düzgün bir biçimde yakalayabildiği için modern nicel finans uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Cont ve Tankov, 2004). Teorik ve hesaplamada elverişli olan NIG süreci, Brownian hareketinin bir inverse Gaussian süreç ile zaman değiştirilmesi olarak temsil edilebilen özel bir pure sıçrama modelidir (Geman vd., 2001).

Eğer $\{X_t\}_{t \geq 0}$ normal bir ters Gauss sürecini temsil ediyorsa, X_t 'in üç parametrelili dağılımının karakteristik fonksiyonu;

$$\varphi_{NIG}(u; \alpha, \beta, t\delta) = \exp \left[-t\delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right]$$

şeklinde olur.

NIG modeli, bir ters Gauss bağımlayıcı T tarafından izlenen bir Brownian hareketi olup;

$$X(t) = B(T(t))$$

şeklinde gösterilmektedir. $T = (T_t^v)_{t \geq 0}$ ters Gauss süreci göz önüne alınırsa ve v , kaymalı Brownian hareketinin pozitif t düzeyine ulaştığı ilk zaman olan T_t^v ise Gauss süresi T_t^v üzerinde sürüklenme parametresi θ ve dalgalanma parametresi σ ile Brownian hareketi ele alındığında yeni NIG süreci aynı zamanda bir Brownian hareketinin inverse Gaussian süreci ile zaman değiştirilmesine eşdeğerdir. Bu, sürecin karakteristik üsteli olan Lévy-Khintchine temsiline sahiptir. NIG süreci pure sıçrama süreci olduğundan, difüzyon bileşeni bulunmamaktadır (Schoutens, 2003). Böylece;

$$X_{NIG}(t; \sigma, v, \theta) = \theta T_t^v + \sigma W(T_t^v)$$

gibi tanımlanabilir. Bu yapı ilk olarak Geman vd. (2001) tarafından, tanımlanmış ve daha sonra finansal modellemede geniş uygulama alanı bulmuştur. Zaman değiştirme temsili ise volatilité kümelemesi, değişen

piyasa likiditesi ve işlem yoğunluk dalgalanmaları gibi olguları doğal olarak açıklayabilmektedir. Bu, bir normal ters Gauss süreci olup, karakteristik fonksiyonu;

$$E[e^{iuX_{NIG}(t)}] = \exp\left(-t\sigma\sqrt{\frac{v^2}{\sigma^2} - \frac{\theta^2}{\sigma^4} - \left(\frac{\theta}{\sigma^2} + iu\right)^2} - \frac{v}{\sigma}\right)$$

kolaylık sağlaması için;

$$\beta = \frac{\theta}{\sigma^2}, \quad \alpha^2 = \frac{v^2}{\sigma^2} + \frac{\theta^2}{\sigma^4}, \quad \delta = \sigma$$

olarak yazılmaktadır. Analitik olarak düzgün ve yüksek stabilite sağladığından Fourier yöntemleri (Carr ve Madan, 1998) için son derece uygun bir yapıdır. Bu ilişkiler kullanılarak, NIG süreci;

$$X_{NIG}(T; \alpha, \beta, \delta) = \beta\delta^2T_t^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} + \delta W\left(T_t^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)$$

gibi ifade edilebilir. Zamana bağlı sıçrama değeri (ters Gauss süreci) X , ortalama $\beta\delta^2u$ ve varyansa δ^2u olmak üzere ters Gauss'un değiştirilmiş zamanındaki sıçramaların Lévy yoğunluğu;

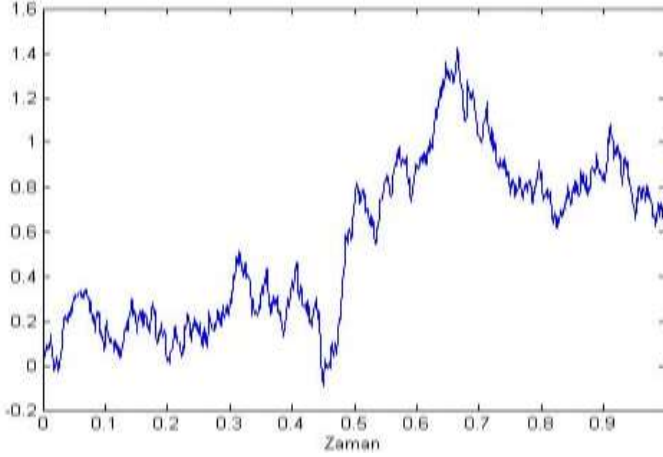
$$v(u) = \frac{\exp\left[\frac{-\delta^2(\alpha^2 - \beta^2)}{2}u\right]}{u^{3/2}}$$

olarak ve bu ifadeden yararlanılarak, NIG süreci için Lévy yoğunluğu ise;

$$V_{NIG}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta\alpha^2e^{\beta x}\frac{K_1(|x|)}{|x|}$$

olarak bulunmaktadır. $K_\alpha(x)$, genelleştirilmiş Bessel fonksiyonudur (Cont ve Tankov, 2004). Bu yapının sonsuz aktivite içermesi, büyük sıçramaların hiperbolik hızla azalması ve küçük sıçramaların yoğunluğu çok yüksek olması gibi özelliklere sahip olduğu, ayrıca finansal piyasalarda gözlenen mikro dalgalanmaları yakalamada oldukça etkili olduğu belirlenmiştir (Carr vd., 2002).

Şekil 9, $\alpha = 50$, $\beta = -10$ ve $\delta = 1$ parametreleriyle normal ters Gauss sürecinin örnek bir yörüngesini göstermektedir.

Şekil 9. Nermal ters Gauss sürecinin örnek yörüngesi

NIG süreci, NIG modelini finansal getiriler için son derece uygun hâle getiren istatistiksel özellikleri sağlamaktadır. Bu sürecin dağılım özellikleri aşağıda verilmiştir.

- ✓ *Ağır kuyruklar:* Kuyruklar Gauss dağılımına göre çok daha ağır, fakat stabil dağılımlara göre daha hafif yapıdadır.
- ✓ *Asimetri:* β parametresi ile pozitif/negatif şok asimetrisi kontrol edilebilir.
- ✓ *Yüksek basıklık:* Piyasada yüksek basıklık yaygın olup NIG modeli bu davranışı doğal olarak üretmektedir.
- ✓ *Sonsuz aktivite:* Mikro dalgalanma ve yüksek frekanslı veri uyumu bulunmaktadır.

NIG süreçlerinin opsiyon fiyatlamasında kullanılabilirliği ilk kez Carr vd. (2002), tarafından kapsamlı şekilde incelenmiştir. Opsiyon fiyatlamasında; Fourier dönüşümü ile hızlı fiyatlama, asimetri ve çarpıklığın doğru yansıtılması ve ağır kuyruk yapısı sayesinde örtük volatilité gülümsemesinin açıklanması gibi avantajları sağlamaktadır.

NIG modeli özellikle hisse senedi opsiyonları, döviz piyasaları ve emtia türevleri gibi piyasalarda kullanılmaktadır.

Bu modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

- ✓ Asimetri, ağır kuyruk ve yüksek basıklığı birlikte modelleyebilmesi,
- ✓ Kapalı form karakteristik fonksiyona sahip olması,

- ✓ Zaman değıştirme temsili ile volatilité kümelenmesi açıklayabilmesi ve
- ✓ Sonsuz aktivite sayesinde yüksek frekans uyumu, modelin avantajlarıdır.
- ✓ Parametre sayısının çok olması; kalibrasyon maliyetini artırmakta ve
- ✓ Bazı piyasalarda daha ağır kuyruk gereksinimi ise sınırlılıklarıdır.

Zira CGMY modeli daha esnek kuyruk yapısı barındırmaktadır (Carr vd., 2002).

3.3. Varyans Gama (VG) Modeli

Varyans Gama süreci, sonsuz aktiviteye sahip bir pure sıçrama süreci olarak kabul edilmektedir. Bu model, ilk olarak 1990'da Madan ve Seneta tarafından (Karatzas ve Shreve, 1998) ve daha sonra Madan vd., (1998) tarafından incelenmiştir. Genel olarak, varyans gama süreci için iki farklı temsil yöntemi bulunmaktadır. Bu süreç, gama bağımlıyıcısı tarafından oluşturulmaktadır. Bu model, bir normal rastgele değışkenin varyansının bir gama rastgele değışkeni ile değıştirilmesiyle oluşturulmaktadır. Temelde, VG süreci, hisse senedi fiyatlarının logaritmasını modellemek için kullanılan bir model olan Brownian hareketinin üç parametrelili genişletilmiş bir versiyonudur. Bu süreç, sabit sürüklenme ve dalgalanma ile Brownian hareketinin rastgele değışimini göstermekte ve gama süreci olarak adlandırılmaktadır. Böylece VG sürecinin temel özelliğı, Brownian hareketinin gama süreci ile zaman değıştirilmesi yoluyla oluşmasıdır.

Bu yapı, finansal getirilerde gözlenen; ağır kuyruk, çarpıklık, yüksek basıklık ve volatilité kümelenmesi gibi ampirik olguların oldukça başarılı bir biçimde modellenmesini sağlamaktadır (Madan vd., 1998; Cont ve Tankov, 2004). VG süreci, birim zaman başına varlık getirisinin normal bir dağılıma sahip olduğu rastgele bir zamanın gerçekleşmesine bağılıdır. Bu stokastik süreç ve bağımlı opsiyon fiyatlaması, üç parametrelili bir model sunmaktadır. Dalgalanma ile birlikte, belirginlik ve çarpıklık da bu parametreler tarafından kontrol edilmektedir. VG sürecinin sürekli bir bileşeni bulunmamakta, bunun yerine sürekli zaman aralıklarında sıçramaların sayısı sonsuz olan pure bir sıçrama sürecidir.

VG sürecinde, Brownian hareketinin aksine, logaritmik değişimlerin mutlak değerlerinin toplamı sonlu bir değere sahiptir. Bu nedenle gama varyansı, fiyatları artıran ve azaltan iki artan sürecin farkı olarak yazılan sonlu bir değişim sürecini ifade etmektedir. Böylece bu süreç, iki artan gama sürecinin farkı olarak ifade edilebilir. Bu model, özellikle piyasa tarafından “volatilite gülümsemesi” olarak bilinen örtük volatilite eğrisini açıklama gücü nedeniyle opsiyon fiyatlamasında geniş kullanım alanı bulmaktadır.

VG süreci;

$$B(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma W(t)$$

şeklinde gama süreci tarafından verilen rastgele zamanlarda kayma ile bir Brownian hareketinin değişimini ifade etmektedir. Burada: $B(t; \theta, \sigma)$ ifadesi, $W(t)$ 'nin standart bir Brownian hareketi olduğu bir süreci ifade ederken, bu süreç, θ sürüklenme ve σ dalgalı bir Brownian hareket içermektedir. Bu temsil, sürecin difüzyon bileşeni olmadan tüm volatilitiyi zaman ölçeklenmesi ile üretmesini sağlamaktadır (Geman vd., 2001).

VG süreci, her t anında Varyans Gama dağılımına sahiptir. Bu dağılım; ağır kuyruklu, çarpık, yüksek basıklı ve Gauss dağılımına göre çok daha esnektir. Bu süreç, ayrı zaman aralıklarında bağımsız gama büyümeleri içermektedir. Ortalama oranı μ ve varyans oranı κ , gama süreci $\gamma(t; \mu, \kappa)$ olarak temsil edilirse, yeni yoğunluk fonksiyonu artışı;

$$g = \gamma(t + h; \mu, \kappa) - \gamma(t; \mu, \kappa)$$

ile ifade edilmektedir. Bu dağılım, μh ortalama ve κh varyans ile bir gama dağılımına sahip ve yoğunluk fonksiyonu;

$$f_h(g) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\kappa}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\kappa}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\kappa} g\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\kappa}\right)}, \quad g > 0$$

ile ve Gama yoğunluğunun karakteristik fonksiyonu;

$$\varphi_{\gamma(t)} = \left(\frac{1}{1 - iu \frac{\kappa}{\mu}} \right)^{\frac{\mu^2 t}{\kappa}}$$

ile elde edilmektedir.

VG süreci, sonsuz aktiviteye sahip olmayan bölünebilir bir süreç olup, Lévy yoğunluğu;

$$v_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\mu^2 \exp\left(-\frac{\mu}{\kappa}x\right)}{\kappa x}, & x > 0, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

$X(t; \sigma, \kappa, \theta)$ VG süreci, $B(t; \theta, \sigma)$ sürüklenme ile bir Brownian hareketi ve $\gamma(t; 1, \kappa)$ gama süreci tarafından tanımlanmaktadır.

$$X(t; \sigma, \kappa, \theta) = B(\gamma(t; 1, \kappa); \theta, \sigma)$$

Bu sürecin;

- ✓ σ : Brownian hareketinin dalgalanması,
- ✓ κ : gama varyans oranı gelişimi ve
- ✓ θ : Brownian hareketinde sürüklenme olmak üzere üç parametresi bulunmaktadır.

Bu süreç, Brownian hareketi üzerinde dalgalanmaya ek olarak iki tür kontrol sağlamaktadır. Bu kontroller, sürecin çarpıklığını θ nedeniyle ve basıklığını κ nedeniyle etkilemektedir.

VG süreci için karakteristik fonksiyon;

$$\varphi_{X_t}(u) = \left(\frac{1}{1 - i\theta\kappa u + (\sigma^2\kappa/2)u^2} \right)^{\frac{t}{\kappa}}$$

şeklinde. Bu analitik kapalı formun;

- ✓ Fourier dönüşümü ile hızlı fiyatlama,
- ✓ Parametrelerin ekonomik yoruma uygunluğu, gibi iki önemli avantajı bulunmaktadır (Carr ve Madan, 1998).

VG süreci, iki Gama sürecinin farkı olarak görüldüğünde, Lévy yoğunluk fonksiyonu kullanılarak X_t için Lévy ölçüsü;

$$v_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu_n^2 \exp\left(-\frac{\mu_n}{\kappa_n}|x|\right)}{\kappa_n |x|}, & x < 0 \\ \frac{\mu_p^2 \exp\left(-\frac{\mu_p}{\kappa_p}x\right)}{\kappa_p x}, & x > 0 \end{cases}$$

gibi olacaktır. Bu eşitlikte, VG sürecinin hisse senedi fiyatındaki sıçramanın sonsuz giriş oranı özelliğini, Gama sürecinden devraldığı görülebilmektedir. Çünkü Lévy yoğunluk fonksiyonu ile integral sonucunun sonsuz olduğu görülmektedir.

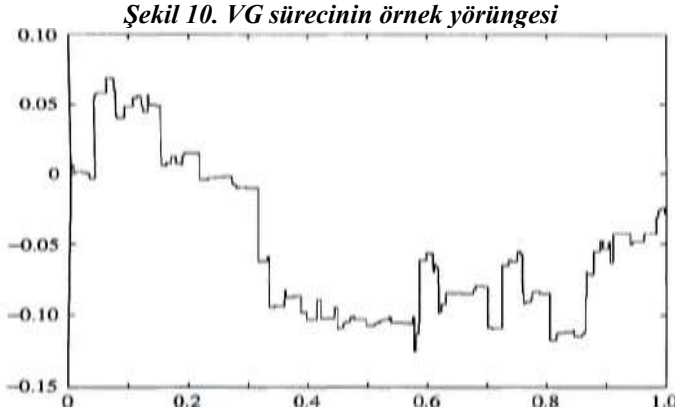
Lévy ölçüsü doğrudan bu parametrelerle yazıldığında ana parametrelerin rolü kolayca görülebilir. (σ, κ, θ) parametrelerine bağlı olarak Lévy ölçüsü;

$$v_x(x) = \frac{\exp\left(\frac{\theta x}{\sigma^2}\right)}{\kappa|x|} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\kappa} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}|x|\right)$$

olarak yeniden tanımlanmaktadır. Bu eşitlik, $\theta = 0$ özel durumu, sıfır civarında simetrik Lévy ölçümünü vermektedir.

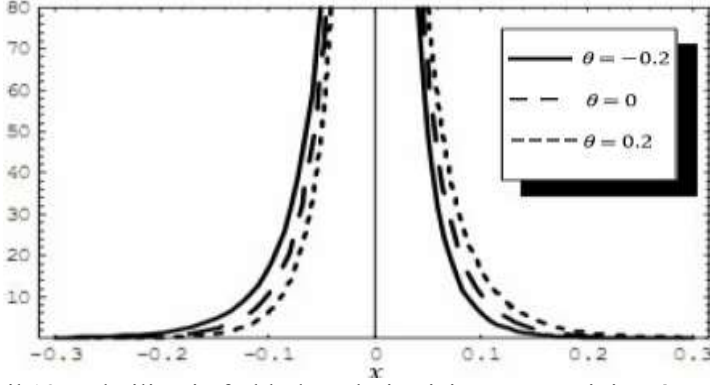
VG süreci; sonsuz aktivite, sonlu varyans ve orta ağırlıkta ağır kuyruklar gibi özelliklere sahiptir. Bu nedenle hiperbolik, NIG ve CGMY modelleri ile karşılaştırıldığında kuyruk davranışı bakımından orta derecede ağır olduğu söylenebilir (Cont ve Tankov, 2004).

Şekil 10, $C = 20$, $G = 40$ ve $M = 50$ parametreleriyle VG sürecinin örnek bir yörüngesi göstermektedir.



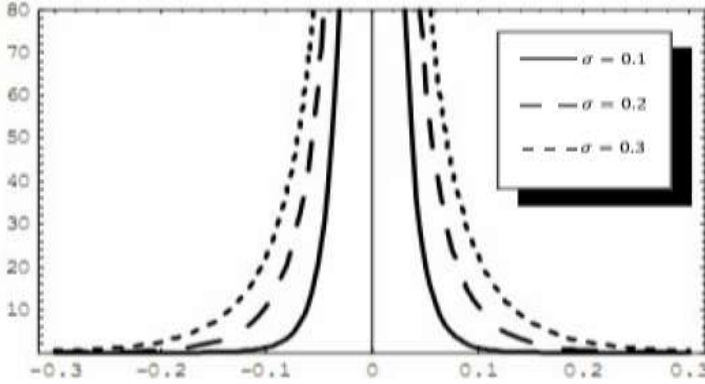
Şekil 11 ise, σ sürüklenme parametrelerinin farklı değerleri için VG sürecinin büyüklüğünü göstermektedir. $\sigma = 0.2$ ve $\kappa = 0.1$ parametreleri sabittir.

Şekil 11. σ 'nın farklı değerleri için VG sürecinin Lévy ölçüsü grafiği



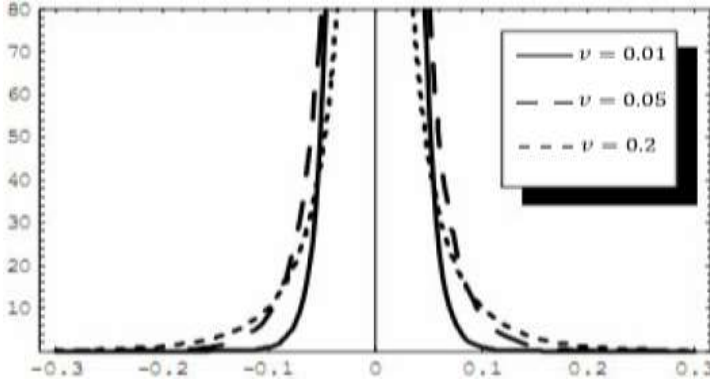
Şekil 12, volatilitenin farklı değerlerine için VG sürecinin Lévy ölçüsüne ait grafiği vermektedir. $\kappa = 0.1$ ve $\theta = 0$ parametreleri sabittir.

Şekil 12. Volatilitenin farklı değerleri için VG sürecinin Lévy ölçüsü grafiği



Şekil 13, takipçi varyansının farklı değerleri için VG sürecinin Lévy ölçüsünü vermektedir. $\theta = 0$ ve $\sigma = 0.2$ parametreleri sabittir.

Şekil 13. Takipçi varyansının farklı değerleri için VG sürecinin Lévy ölçüsü grafiği



VG modeli parametreleri önemli ekonomik yorumlara sahiptir. Bu parametreler ve yorumları;

- ✓ σ (Brownian hareketinin dalgalanması): Kısa vadeli şokların büyüklüğü,
- ✓ θ (Brownian hareketinde sürüklenme): Yönlü piyasa baskısı (pozitif/negatif haber etkisi) ve
- ✓ κ (Gama varyans oranı gelişimi): Volatilite patlamalarının frekansı şeklindedir.
- ✓ Özellikle κ parametresi volatilite gülümsemesini belirleyen en temel faktördür.

Ayrıca, Madan vd., (1998) Avrupa opsiyonları için VG modeline dayalı kapalı form fiyatlama formülünü elde etmişlerdir. Bu yöntem; Black–Scholes’a göre örtük volatilite uyumunu geliştirmekte, piyasa verilerinin ağır kuyruk yapısını doğru yansıtmakta ve çarpıklığı doğal bir şekilde açıklamaktadır. VG modeli ayrıca Amerikan opsiyonları, bariyer opsiyonları ve kredi risk modelleri için Fourier veya dönüşümü teknikleriyle uygulanabilmektedir.

Bu modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

- ✓ Zaman değiştirme temsili sayesinde doğal volatilite yapısına sahip olması,
- ✓ Ağır kuyruklar ve çarpıklığın piyasayı daha iyi temsil etmesi,

- ✓ Kapalı form karakteristik fonksiyon, hızlı Fourier dönüşümü fiyatlamasının çok hızlı olması ve
- ✓ Pure sıçrama, mikro yapı ve yüksek frekanslı veriyle uyumlu olması bu modelin avantajlarıdır.
- ✓ Çok aşırı ağır kuyruk gerektiren piyasalarda yetersiz kalabilmesi, ki bu durumda CGMY modeli daha uygundur.
- ✓ Parametre kalibrasyonunun nispeten zor olması, Özellikle $\kappa - \sigma$ etkileşimi kalibrasyonu kararsızlaştırabilmektedir.
- ✓ Sonsuz aktivite olsa da çok küçük sıçramaların fiyatlamayı zorlaştırması, sayısal yöntemlerde hassasiyet sorunları oluşabilmektedir. Bunlarda modelin sınırlılıklarıdır.

3.4. CGMY Modeli

Genellikle, varlık getirilerini tanımlamak için kullanılan sıçrama-difüzyon modelleri, difüzyon bölümünün sürekli küçük dalgalanmaları yansıttığı ve sıçramaların nadir büyük dalgalanmaları temsil ettiği ilkesine dayanmaktadır. Sonsuz aktivite sıçramaları içerebilen bu model, varlık getirilerini modelleme konusunda hala emisyon bileşenini dahil etmenin gerekliliği konusunu gündeme getirmektedir. Bu soruya yanıt CGMY (Carr–Geman–Madan–Yor) modeliyle verilmektedir. Çalışmada, serbest bırakmalar ve sıçramalar için sürekli bir zaman modeli hem sonlu aktivite hem de sonsuz aktivite modları için tanıtılmaktadır. Model, aslında bir pure sıçrama süreci olup, her zaman diliminde fiyat sıçramalarının sonlu veya sonsuz olmasına bağlı olarak sonlu veya sonsuz bir aktiviteye sahiptir. CGMY modeli, pure sıçrama Lévy süreçleri içinde en esnek ve en genel kuyruk yapısını sunan modellerden biridir (Carr vd., 2002). Model, getiri dağılımlarının ağır kuyruklu, asimetrik ve yüksek frekanslı sıçramalar içeren yapıya sahip olduğundan modern nicel finans literatüründe “*universal model*” olarak tanımlanmaktadır.

CGMY modeli, varlık riski ve varlık tahsisi süreçlerini incelemek, türevlerin fiyatlandırılması ve riskten korunma için risksiz süreçleri değerlendirmek amacıyla kullanılır. Bu modelde, difüzyon bileşeni bulunmamakta, sıçrama bileşeninin varlığı ise hem pozitif hem de negatif olabilmektedir (Carr ve Madan, 1998). Bu model, VG modelinin genelleştirilmiş hâli olarak ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla CGMY modeli,

hiperbolik, NIG ve VG gibi diğer pure sıçrama modellerinin özelliklerini tek bir parametrik çerçeveye içinde birleştiren güçlü bir yapıdan oluşmaktadır (Schoutens, 2003; Cont ve Tankov, 2004).

Yeni model, yörüngenin sürekliliği ve otomatik düzelme yeteneği gibi özellikleri koruyarak Brownian hareketinin temel özelliklerini değiştirmeyi amaçlamaktadır. Karakteristik fonksiyon, Lévy-Khinchin teoremi tarafından benzersiz bir şekilde tanımlanmaktadır. Özellikle, $X(t)$, sonlu sıçrama bileşenine sahip bağımsız büyüme ve sabit sürüklenme a ve difüzyon katsayısı b ile sonsuz bölünebilir bir süreç içinde karakteristik fonksiyon;

$$E[e^{iuX(t)}] = E\left[iuat - \frac{u^2 b^2 t}{2} + t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)v(x)dx\right]$$

eşitliği ile benzersiz bir şekilde tanımlanmaktadır. Burada, Lévy yoğunluğu $v(x)dx$, x konumundaki sıçramaların varış hızını ölçmektedir. Bu süreçlerin sıçrama bileşeni tamamen Lévy yoğunluğu tarafından belirlenmektedir.

VG modeli daha önce ayrıntılı bir şekilde incelenmişti, VG modelinin volatilitiyi açıklamadaki başarısı, bu modelin sonsuz aktiviteye sahip olmasına rağmen sonlu değişime sahip pure bir sıçrama süreci olmasından kaynaklanmaktadır. CGMY süreci aslında sonlu bir değişken parametresi içeren genelleştirilmiş bir VG sürecidir. Modele eklenen Y parametresi, sonlu veya sonsuz aktiviteyi ve sonlu veya sonsuz değişimi temsil etmektedir. Gama varyansının CGMY modeline genellemesi Y parametresi tarafından gerçekleştirilmektedir.

CGMY süreci bir pure sıçrama Lévy süreci olduğundan CGMY yoğunluğu;

$$V_{CGMY}(x) = \begin{cases} C \frac{\exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}}, & x < 0 \\ C \frac{\exp(-M|x|)}{|x|^{1+Y}}, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada: $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$ ve $Y < 2$ koşulları geçerlidir. C , sıçrama yoğunluğunu; G , pozitif yöndeki zayıflama oranını; M , negatif yöndeki zayıflama oranını ve Y , kuyruk kalınlığını belirleyen aktivite indeksini vermektedir. Bu yoğunluk formu modelin en güçlü özelliğini oluşturmakta ve G , M ve Y parametreleri kuyruk davranışının şekillenmesinde kritik bir rol oynamaktadır.

Sonsuz aktivite süreçleri ilk olarak finans teorisinde finansal piyasa verilerinin ilk tahminleri olarak kabul edilmektedir. Bu süreçler, yüksek düzeyde aktiviteye sahip pazarları incelemek amacıyla tasarlanmıştır. Bu piyasalarda kısa süreli sürekli ve sonsuz gelişmeler hisse senedi fiyat trendinde sıçramalara neden olmaktadır. Bu nedenle, herhangi bir sonlu aralıktaki aktivite veya sıçrama miktarı sonsuz olarak kabul edilmektedir. Modelin sıçrama yapısının sınıflandırılmasını sağlayan Y , CGMY modelinin en önemli parametresidir.

Tablo 1. Y parametresinin farklı değerleri için CGMY sürecinin özellikleri

Y değerleri aralığı	Süreç özellikleri
$Y < -1$	Tamamen monoton olmayan süreç, sonlu aktivite
$-1 < Y < 0$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite
$0 < Y < 1$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite, sonlu değişimin
$1 < Y < 2$	Tamamen monoton süreç, sonlu aktivite, sonsuz değişimin

Bu tablo, CGMY modelinin her tür piyasa dinamiğini temsil edebilecek esneklikte olduğunu göstermektedir.

VG modelinde Y 'nin 0'a eşit olması durumu CGMY modelini vermekte (Madan vd., 1998) ve süreç parametreleri;

$$C = \frac{1}{\kappa}, \quad G = \frac{\mu_n}{\kappa_n} \quad \text{ve} \quad M = \frac{\mu_p}{\kappa_p}$$

olur. Bu parametreler, bu süreçlerin farklı yönlerini incelemede temel rol oynamaktadırlar. C , tüm aktiviteleri içeren bir ölçü olarak kabul edilirken, $G = M$ olduğu durumda Lévy boyutu simetrik olmaktadır. Madan (1998) tarafından, bu özel durumda C parametresinin $X(t)$ dağılımını kontrol edeceği gösterilmektedir. $G = M$ modu, Koponen (1995) tarafından da incelenmektedir.

Ayrıca $Y < 0$ durumunda model, bileşik Poisson süreçlerine yaklaştığından ve $Y = 2$ durumunda ise Brownian hareketi sınırına yakın davrandığından dolayı CGMY modeli; hiperbolik modellerden daha ağır, NIG'den daha genel, VG'den daha esnek, Merton ve Kou modellerinden çok

daha gerçekçi bir kuyruk yapısı sunmaktadır. Dolayısıyla CGMY modeli bu modellerin tümünü kapsamaktadır.

Bağımsız büyümler ve CGMY yoğunluğu ile sonsuz bölünebilirlik sürecinin karakteristik fonksiyonu;

$$\varphi_{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) = \exp\{tC\Gamma(-Y)[(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y]\}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu kapalı forma olup CGMY, $(X_t)_{t \geq 0}$ süreci için, $(0, V_{CGMY}, 0)$ üçlüsüyle elde edilmektedir. Bu fonksiyon, Fourier dönüşüm teknikleri ile hızlı opsiyon fiyatlaması için uygun olması ve Y parametresinin analitik türetilbilir yapısı nedeniyle kalibrasyonda avantaj sağlaması ile öne çıkmaktadır.

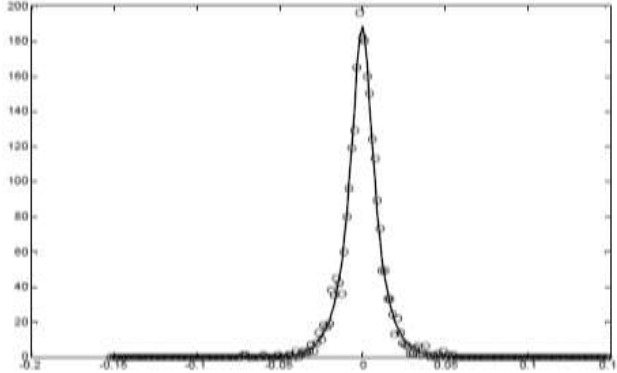
CGMY modelinin kuyrukları Pareto benzeri ağır kuyrukludur.

$$P(|X| > x) \sim x^{-Y}$$

Bu durum, hiperbolik ve NIG dağılımlarından daha ağır, stabil dağılımlardan daha hafif/yönetilebilir bir kuyruk yapısı sağlamaktadır. Bu nedenle CGMY, finansal kriz dönemlerindeki büyük fiyat hareketlerini, aşırı oynak dönemleri ve likiditenin kesildiği şokları doğru şekilde modelleyebilmektedir.

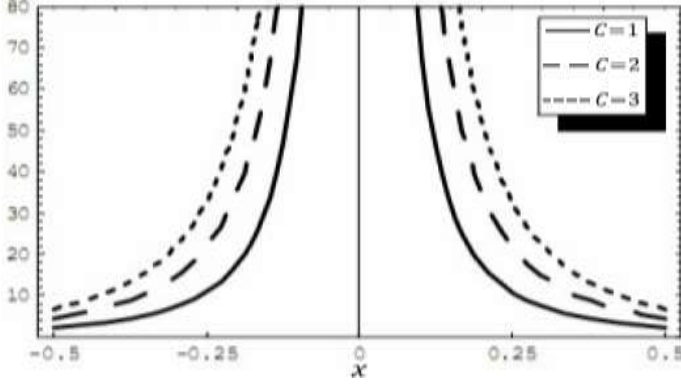
Şekil 14, CGMY sürecinin SPX indeks verilerine uydurulmasını göstermektedir.

Şekil 14. CGMY modeline uydurulmuş SPX endeks verileri



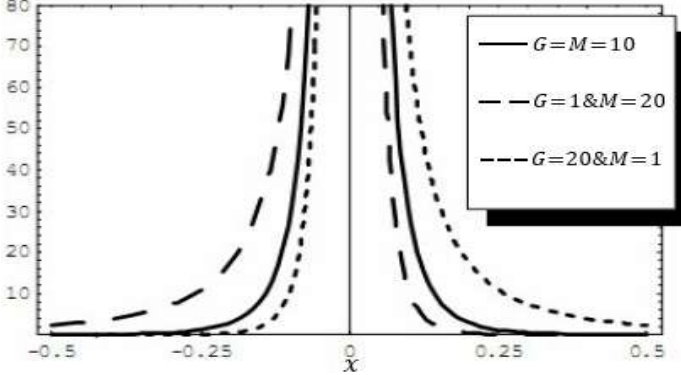
Şekil 15, C 'nin çeşitli değerleri için CGMY sürecinin Lévy yoğunluğunu göstermektedir. $G = 1$, $M = 1$ ve $Y = 0.9$ parametreleri sabittir.

Şekil 15. C 'nin çeşitli değerler için CGMY sürecinin Lévy yoğunluk grafiği



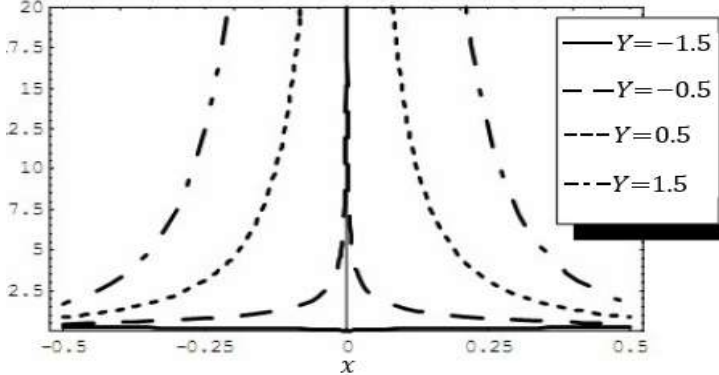
Şekil 16, G ve M 'nin farklı değerleri için CGMY sürecinin Lévy yoğunluğunu göstermektedir. $C = 1$ ve $Y = 0.9$ parametreleri sabittir.

Şekil 16. G ve M 'nin farklı değerler için CGMY sürecinin Lévy yoğunluk grafiği



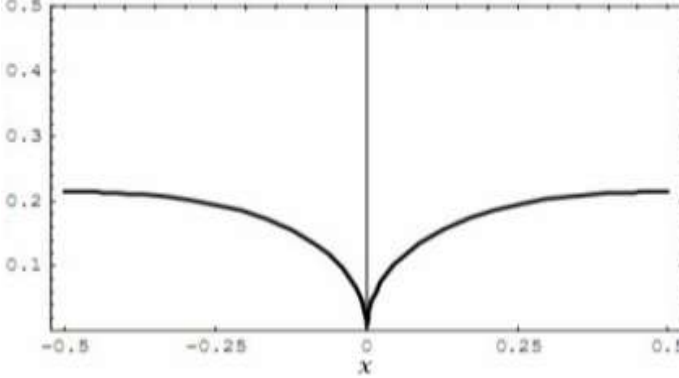
Şekil 17, Y 'nin farklı değerleri için CGMY sürecinin Lévy yoğunluğunu göstermektedir. $G = 1$, $M = 1$ ve $C = 0.5$ parametreleri sabittir.

Şekil 17. Y 'nin farklı değerleri için CGMY sürecinin Lévy yoğunluk grafiği



Şekil 18, $Y = -1.5$ 'in farklı değerleri için CGMY sürecinin Lévy ölçüsünü göstermektedir. $G = 1$, $M = 1$ ve $C = 0.5$ parametreleri sabittir.

Şekil 18. $Y = -1.5$ 'in farklı değerler için CGMY sürecinin Lévy ölçüsü grafiği



CGMY sürecinin bazı teorik özellikleri bulunmaktadır. Aşağıda verilen bu özellikler CGMY modelini finansal piyasalardaki en kapsamlı Lévy süreci yapmaktadır (Carr vd., 2002).

- ✓ *Sonsuz aktivite*: Her zaman aralığında sonsuz sayıda sıçrama bulunmaktadır.
- ✓ *Sonsuz varyans* ($Y > 1$ için): Çok ağır kuyruklar gerektiren piyasalarda uygundur.
- ✓ *Stabil süreçlere yakın davranış* ($Y \approx 1$): Forex ve kripto piyasaları gibi yüksek volatilité ortamlarına uygundur.
- ✓ *Zayıflama parametreleri* (G, M): pozitif ve negatif kuyruk davranışı ayrı ayrı kontrol edilebilmektedir.

CGMY modeli, örtük volatilité yüzeyinin tamamına yayılmış olan; çarpıklık, gülümseme, dışbükeylik ve ağır kuyruk davranışı özelliklerini aynı anda yakalayabilmesi nedeniyle endüstride opsiyon fiyatlamasında yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bu model; hızlı Fourier dönüşümü, hızlı Gauss dönüşümü, Monte Carlo ve asimptotik genişleme gibi yöntemlerle kolayca fiyatlanabilmektedir. Bunun asıl avantajı; örtük volatilité eğrisinin tüm noktalarında Black-Scholes'a göre belirgin biçimde daha doğru fiyatlama yapabilmesidir.

Bu modelinin bazı avantaj ve sınırlılıkları bulunmaktadır. Bunlar aşağıda sırayla verilmiştir.

- ✓ En esnek pure sıçrama modeli (4 parametre güçlü kontrol sağlar) olması,
- ✓ Sol ve sağ kuyruk yönünde bağımsız şekillendirme oluşturmaları,
- ✓ Finansal krizlerde gözlenen ani çöküşleri doğru modellemesi,
- ✓ Sonsuz aktivite, yüksek frekans verilerini mükemmel temsil etmesi,
- ✓ Fourier tabanlı fiyatlamaya tekniklerine tam uyum sağlaması ve
- ✓ VG, NIG, hiperbolik ve stabil süreçleri kapsayan genel çerçeveye sunması, modelin avantajlarını;
- ✓ Dört parametre nedeniyle kalibrasyonunun zor olması, yüksek doğruluk için gelişmiş optimizasyon gerekmektedir.
- ✓ $Y > 1$ durumunda varyansın sonsuz olabilmesi, bu durum bazı uygulamalar için teknik güçlükler yaratabilmektedir.
- ✓ Sayısal integral yöntemlerinde kuyruk yakınlaştırma ihtiyacı, kuyruklar çok ağır olduğunda nümerik stabilite zorlaşabilmektedir. Modelin sınırlılıklarını oluşturmaktadır.

4. Sonuç

Bu bölümde, finansal varlık fiyatlarının gerçekçi biçimde modellenmesi için gerekli olan sıçrama-difüzyon ve pure sıçrama süreçlerinin yapısal özellikleri kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Teorik olarak Bölüm I'de sunulan Lévy süreçleri çerçevesi üzerine inşa edilen bu modeller, finansal piyasalarda gözlenen ağır kuyruklu dağılımlar, ani ve büyük fiyat değişimleri, volatilité kümelenmesi ve asimetrik getiri davranışları gibi ampirik olguları açıklamada Brownian hareketine dayalı klasik difüzyon modellerinden daha güçlü bir temsil gücü sunmaktadır.

Merton, Kou ve diğer sıçrama-difüzyon modelleri, difüzyon bileşeninin sürekli dalgalanmaları, sıçrama bileşeninin ise nadir fakat büyük fiyat hareketlerini yakalamasına olanak tanıyan esnek bir yapı sağlamaktadır. Bu modeller, özellikle opsiyon fiyatlamasında örtük volatilité gülümsemesi, çarpıklık ve basıklık gibi piyasa olgularının daha başarılı biçimde modellenmesine katkı sağlamaktadır. Bununla birlikte, parametrik karmaşıklık ve kalibrasyon zorlukları belirli sınırlılıklara işaret etmektedir.

Pure sıçrama süreçleri (Hiperbolik, NIG, VG, CGMY gibi modeller) ise finansal getirilerin yüksek frekanslı veri yapısını ve mikro dinamiklerini temsil etmede modern finans literatürünün en yetkin araçları arasındadır.

Brownian bileşenin tamamen ortadan kaldırıldığı bu modellerde fiyat hareketleri yalnızca sıçramalarla açıklanmakta; bu da sonsuz aktivite ve ağır kuyruk özelliklerinin daha doğal bir biçimde modellenmesine imkân vermektedir. Fourier dönüşüm yöntemlerinin uygulanabilirliği sayesinde bu süreçler hesaplama açısından da oldukça verimli modeller ortaya koymaktadır.

Genel olarak değerlendirildiğinde, bu bölümde incelenen modeller nicel karar verme süreçleri için önemli bir metodolojik genişlik sunmaktadır. Finansal piyasalardaki belirsizliklerin karmaşıklığı düşünüldüğünde, yalnızca sürekli difüzyon varsayımlarına dayalı modellerin yeterli olmadığı; bunun yerine Lévy süreçleri temelli sıçrama-difüzyon ve pure sıçrama modellerinin stratejik bir gereklilik hâline geldiği görülmektedir. Bu modeller, risk yönetimi, türev ürün fiyatlaması, portföy optimizasyonu ve stres senaryoları gibi karar mekanizmalarında daha doğru ve esnek yapılar oluşturulmasına katkıda bulunmaktadır.

Sonuç olarak, Bölüm II, nicel karar verme literatüründe Lévy tabanlı finansal modellerin teorik temelden pratik uygulamaya uzanan yerini ortaya koymuş; bu modellerin modern finansal analizde ve ileri istatistiksel karar süreçlerinde neden vazgeçilmez hâle geldiğini kapsamlı biçimde açıklamıştır. Böylece kitabın sonraki bölümlerine hem teorik hem de ampirik açıdan güçlü ve bütüncül bir altyapı sunulmuştur.

Kaynaklar

- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, 21–86.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2(1), 41–68.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley.
- Carr, P., & Madan, D. (1998). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2, 61–72.
- Carr, P., & Wu, L. (2002). *Time-changed Lévy processes and option pricing* [Working paper]. Frank J. Petrilli Center for Research in International Finance.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D., & Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75(2), 305–332.
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC.
- Eberlein, E., & Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 1(3), 281–299.
- Eberlein, E., Keller, U., & Prause, K. (1998). New insights into smile, mispricing and Value at Risk: The hyperbolic model. *Journal of Business*, 71, 371–405.
- Geman, H., Madan, D., & Yor, M. (2001). Time changes for Lévy processes. *Mathematical Finance*, 11, 79–96.
- Hanson, F. B., & Westman, J. J. (2002). *Jump-diffusion stock return models in finance: Stochastic process density with uniform-jump application*. University of Illinois at Chicago.
- Hull, J. C. (2001). *Fundamentals of futures and options markets*. Pearson Education.
- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- Koponen, I. (1995). Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights toward the Gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 52, 1197–1199.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8), 1086–1101.
- Madan, D. B., & Seneta, E. (1990). The variance gamma model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4), 511–524.
- Madan, D. B., Carr, P., & Chang, E. (1998). The variance Gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2, 79–105.

- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- Press, S. (1967). A compound events model for security prices. *Journal of Business*, 40, 317–335.
- Protter, P. (2001). A partial introduction to financial asset pricing theory. *Stochastic Processes and Their Applications*, 91(2), 169–203.
- Protter, P. E. (2005). *Stochastic integration and differential equations* (2nd ed.). Springer.
- Ramezani, C. A., & Zeng, Y. (1999). *Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion process: Application to security prices* [Working paper]. University of Wisconsin.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives*. John Wiley & Sons.
- Tankov, P. (2004). *Lévy processes in finance: Inverse problems and dependence modelling* [Doctoral dissertation, École Polytechnique].