

BÖLÜM 4

KUYRUK BAĞIMLILIĞININ KOPULA VE AŞIRI DEĞER TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE ANALİZİ: BIST SİNAİ ENDEKSİ-DÖVİZ KURU UYGULAMASI

Elvan HAYAT¹

Özet

Finansal piyasalarda risk yönetimi uzun yıllar boyunca büyük ölçüde normal dağılım varsayımına ve doğrusal korelasyon temelli yaklaşımlara dayanmıştır. Ancak finansal zaman serilerinin kalın kuyruk yapısı, oynaklık kümelenmesi ve ekstrem değerlerde artan birlikte hareket gibi özellikler sergilemesi, geleneksel yaklaşımların özellikle kriz dönemlerinde önemli ölçüde yetersiz kaldığını ortaya koymaktadır. Bu çalışmada, Borsa İstanbul Sınai Endeksi (BIST Sınai) ile ABD Doları-Türk Lirası döviz kuru (USD/TRY) arasındaki bağımlılık yapısı, Aşırı Değer Teorisi (Extreme Value

1 Doç. Dr., Ekonometri Bölümü, Siyasal Bilgiler Fakültesi, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın, Türkiye. E-posta: elvan.hayat@adu.edu.tr | ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8200-8046>



Lisans: Creative Commons Atıf 4.0 Uluslararası (*License: Creative Commons Attribution 4.0 International*) (CC BY 4.0).

Açık Erişim / Open Access.

DOI (kitap): <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220>

Tavsiye Edilen Atıf / Recommended Citation:

Hayat, E. (2025). Kuyruk Bağımlılığının Kopula ve Aşırı Değer Teorisi Çerçevesinde Analizi: BIST Sınai Endeksi-Döviz Kuru Uygulaması. E. Hayat (Ed.), *Nicel Karar Vermede İleri İstatistiksel Yaklaşımlar* içinde (ss. 103-123). Turkuaz Yayınları. <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220.c166>

Theory – EVT) ve kopula fonksiyonları birlikte kullanılarak incelenmiştir. Çalışmada 03.01.2022–03.12.2025 dönemine ait 981 günlük logaritmik getiri verisi kullanılmıştır. Gaussian, Student-t, Clayton ve Gumbel olmak üzere dört farklı kopula modeli karşılaştırılmış ve Akaike Bilgi Kriteri (AIC) sonuçlarına göre Gumbel kopulasının en uygun model olduğu belirlenmiştir. Bu bulgu, BIST Sınai endeksi ile USD/TRY arasındaki ilişkinin özellikle pozitif şoklar sırasında üst kuyrukta asimetrik ve güçlü bir bağımlılık yapısı sergilediğini ortaya koymaktadır. Ayrıca eşit ağırlıklı bir portföy için %99 güven düzeyinde hesaplanan Riske Maruz Değer (VaR) sonuçları, geleneksel normal dağılıma dayalı yöntemlerin riski yaklaşık %21 oranında eksik tahmin ettiğini göstermektedir. Elde edilen bulgular, finansal riskin yalnızca piyasalar arası korelasyondan değil, aynı zamanda marjinal dağılımlardaki şişman kuyruk (fat-tail) yapısından da kaynaklandığını ortaya koymakta ve EVT tabanlı kopula yaklaşımlarının risk yönetiminde kullanılmasının önemini vurgulamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kuyruk Bağımlılığı, Kopula, Aşırı Değer Teorisi, Finansal Risk

JEL Kodları: C13, C46, C58

ANALYSIS OF TAIL DEPENDENCE WITHIN THE FRAMEWORK OF COPULA AND EXTREME VALUE THEORY: BIST INDUSTRIAL INDEX-EXCHANGE RATE APPLICATION

Abstract

Traditional risk management practices in financial markets have long relied on the assumptions of normal distribution and linear correlation. However, the presence of fat tails, volatility clustering, and increased co-movement during extreme events in financial time series reveals that traditional approaches become significantly inadequate, particularly during periods of crisis. In this study, the dependence structure between the Borsa Istanbul Industrial Index (BIST Industrial) and the exchange rate of US Dollar-Turkish Lira (USD/TRY) is examined using a combined framework of Extreme Value Theory (EVT) and copula models. The analysis is based on 981 daily logarithmic returns covering the period from January 3, 2022, to December 3, 2025. Four different copula models—Gaussian, Student-t, Clayton, and Gumbel—are estimated and compared using the Akaike Information Criterion (AIC). The results indicate that the Gumbel copula

provides the best fit, implying the presence of strong and asymmetric upper tail dependence between the BIST Industrial Index and the USD/TRY exchange rate, particularly during periods of positive shocks. Furthermore, Value at Risk (VaR) estimates at the 99% confidence level for an equally weighted portfolio reveal that traditional normal-distribution-based methods underestimate the actual risk by approximately 21%. These findings demonstrate that financial risk arises not only from inter-market dependence but also from fat-tailed marginal distributions, highlighting the necessity of EVT-based copula models for more accurate risk measurement.

Keywords: Tail Dependence, Copula, Extreme Value Theory, Financial Risk

JEL Codes: C13, C46, C58

1. Giriş

Finansal istatistik ve risk yönetimi literatüründe bağımlılık yapılarının doğru biçimde modellenmesi, gerek portföy çeşitlendirmesinin sağlıklı şekilde yapılabilmesi gerekse risk ölçümlerinin güvenilir sonuçlar verebilmesi açısından temel bir öneme sahiptir. Analizlerde sıklıkla kullanılan Pearson korelasyon katsayısı, yalnızca doğrusal ilişkileri ölçebilmesi ve değişkenlerin normal dağıldığı varsayımına dayanması nedeniyle, finansal piyasaların yapısal karmaşıklığını ve çoğu zaman simetrik olmayan bağımlılık yapılarını temsil etmekte yetersiz kalmaktadır (Embrechts, McNeil ve Straumann, 2002). Oysa finansal zaman serilerinin tarihsel davranışına bakıldığında volatilité kümelenmesi, keskin tepe ve kalın kuyruk özellikleri ile özellikle kriz dönemlerinde artan ortak hareket yapısı gibi normallikten önemli sapmalar sergilediği bilinmektedir (Mandelbrot, 1963). Bu özellikler, finansal varlıkların aslında doğrusal olmayan, zamanla değişen ve uç noktalarda belirginleşen bir bağımlılık yapısına sahip olduğunu göstermektedir.

Bu bağımlılık yapısının geleneksel korelasyon ile tam olarak anlaşılabilmesi mümkün değildir. Özellikle kriz dönemlerinde korelasyonun ani yükselmesi ve varlıkların uç bölgelerde birlikte hareket etme eğilimi, literatürde korelasyon bozulması veya korelasyon çöküşü (correlation breakdown) olarak adlandırılan duruma yol açmakta ve risk modellerinin portföy kaybını sistematik olarak düşük tahmin etmesine neden olmaktadır. Bu zorluklar, bağımlılığın yalnızca ortalama ilişkiler üzerinden değil, dağılımın uç noktalarındaki davranışlar üzerinden incelenmesi gerektiğini açık biçimde ortaya koymaktadır.

Bu bağlamda, bağımlılık yapısını yalnızca ortalama davranışa göre değil, dağılımın uç noktalarında (kuyruklarında) inceleyen Uç Değer Teorisi (Extreme Value Theory-EVT) ve bu teorelin bir uzantısı olan kuyruk bağımlılığı (tail dependence) kavramı finans literatüründe giderek önem kazanmaktadır. Kuyruk bağımlılığı, iki değişkenin ekstrem (aşırı-uç) değerlerde birlikte hareket etme eğilimini ölçen asimptotik bir olasılık göstergesidir (Joe, 1997). Dolayısıyla bir varlığın getirisi belirli bir eşik değerin altına düştüğünde veya belirli bir eşikğin üstüne çıktığında, diğer varlığın da aynı uç bölgeye düşme olasılığını nicel olarak ifade eder. Bu özellik, finansal stres dönemlerinde sistemik riskin değerlendirilmesi, stres

testlerinin uygulanması ve portföy dayanıklılığının analiz edilmesi açısından çok önemli bir rol oynamaktadır.

Kuyruk bağımlılığının modellenmesinde en temel araçlardan biri kopula (copula) fonksiyonlarıdır. Sklar'ın (1959) teoremine dayanan kopula yaklaşımı, çok değişkenli dağılımın marjinal dağılımlardan bağımsız olarak modellenmesine imkan vererek bağımlılık yapısının doğrudan temsil edilmesini sağlar. Böylece kopula modelleri, finansal serilerin sergilediği simetrik veya asimetrik bağımlılığı esnek bir biçimde yakalayabilir. Arşimedian kopulalar (Clayton, Gumbel, Frank) farklı kuyruk özelliklerini modelleme kapasiteleri ile dikkat çekerken, Student-t kopulası hem alt hem üst kuyruklarda pozitif bağımlılık üretebilmesi nedeniyle özellikle kriz dönemlerinde ağır kuyruk yapısını gerçekçi biçimde temsil eden bir araç olarak öne çıkmaktadır (Nelsen, 2006; Demarta&McNeil, 2005). Son yıllarda Vine kopulalar da çok değişkenli bağımlılık yapılarının esnek bir şekilde modellenmesine olanak tanıdığı için hem akademik hem uygulamalı araştırmalarda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır (Joe, 1997; Bedford & Cooke, 2002).

Ulusal literatürde de kopula temelli bağımlılık modellemeye yönelik ilginin arttığı görülmektedir. Türkiye finansal piyasaları üzerine yapılan ampirik çalışmalarda, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modellemek amacıyla farklı kopula ailelerinin sıkça kullanıldığı görülmektedir. Özellikle döviz kuru, enflasyon ve borsa endeksleri arasındaki ilişkilerin incelendiği araştırmalarda, verinin yapısına bağlı olarak değişen sonuçlar elde edilmiştir. Döviz kuru ve makroekonomik göstergeler arasındaki etkileşimi ele alan çalışmalarda, genellikle Arşimedian kopula ailesinin öne çıktığı görülmektedir. Gülöksüz (2015), Tüketici Fiyat Endeksi (TÜFE) ile USD/TRY kuru arasındaki ilişkiyi incelediği çalışmasında, değişkenlerin birlikte artma eğiliminde olduğunu ve bu yapının en iyi Gumbel kopulası ile modellendiğini tespit etmiştir. Benzer şekilde Büyükyılmaz (2016), enflasyon dinamiklerini analiz ettiği çalışmasında Üretici Fiyat Endeksi (ÜFE) ile TÜFE arasındaki güçlü bağımlılığı modellemek için Gumbel-Hougaard ailesinin en uygun yapı olduğunu ortaya koymuştur. Karakaş ve Doğan (2017) ise USD/TRY kuru ile mevduat faiz oranları arasındaki pozitif yönlü ilişkiyi Joe kopulası yardımıyla belirlemiştir.

Borsa İstanbul (BIST) ve döviz piyasaları arasındaki ilişkiyi inceleyen araştırmalarda ise bulgular kullanılan kriterlere göre farklılaşabilmektedir.

Çelik (2022) çalışmasında, BIST 100 endeksi ile USD/TRY arasındaki ilişkiyi analiz etmiş ve veriye en iyi uyum sağlayan modelin simetrik yapıli t-kopula olduğu sonucuna varmıştır. Ünal (2022), BIST elektrik endeksi ve dolar kuru özelinde yaptığı çalışmada, Hata Kareler Ortalaması (MSE) kriterine göre Clayton kopulasının, Akaike (AIC) ve Bayes (BIC) bilgi kriterlerine göre ise Gumbel kopulasının daha başarılı olduğunu raporlayarak, model seçiminde kullanılan kriterin önemine dikkat çekmiştir.

Son dönemde yapılan çalışmalarda ise, çok değişkenli yapıları ve sektörler arası karmaşık ilişkileri modelleyebilen asma (Vine) kopula yöntemlerine ilginin arttığı gözlemlenmektedir. Farnoudkia ve Purutçuoğlu (2020), Borsa İstanbul'daki tüm sektörleri kapsayan analizlerinde, inşaat sektörü ile diğer sektörler arasındaki bağımlılık ağını R-Vine kopula yöntemiyle ortaya koymuştur. Risk yönetimi odaklı çalışmalarda ise hibrit modellerin başarısı vurgulanmaktadır. Özgür ve Sarıkovanlık (2021), BIST 30 hisseleri üzerinde gerçekleştirdikleri geriye dönük testlerde (backtesting), R-Vine Copula-GARCH modelinin Beklenen Kayıp (Expected Shortfall-ES) tahminlerinde üstün performans sergilediğini belirlemiştir. Benzer bir yaklaşımla Yıldırım Külekçi vd. (2023), bankacılık sektörü hisselerini inceledikleri çalışmalarında, GARCH ve R-Vine yöntemlerinin entegre edilmesinin, geleneksel yöntemlere kıyasla Riske Maruz Değer (VaR) tahminlerinde belirgin bir iyileşme sağladığını göstermişlerdir.

Bununla birlikte, finansal risk sadece varlıklar arasındaki korelasyondan değil, aynı zamanda varlıkların kendi marjinal dağılımlarından da kaynaklanmaktadır. Literatürde genellikle kuyruk bağımlılığının varlığına odaklanılsa da, varlıklar arasında güçlü bir bağımlılık olmasa dahi, 'şişman kuyruklu (fat-tail)' marjinal dağılımların risk tahminlerini nasıl saptırdığı ampirik olarak incelenmesi gereken bir konudur. Bu çalışma, söz konusu ayrımı BIST sınai endeksi ve USD/TRY örneği üzerinden somutlaştırmayı hedeflemektedir. Bu amaçla, bu iki seriye ait gözlem değerleri 03.01.2022–03.12.2025 dönemi için derlenmiş ve günlük getiriler hesaplanarak analizler gerçekleştirilmiştir.

Bu araştırmanın temel amacı, kuyruk bağımlılığı kavramını Aşırı (Uç-Ekstrem) Değer Teorisi perspektifiyle, teorik ve uygulamalı boyutlarıyla ele alarak finansal risk modellemesi bağlamında değerlendirmektir. Bu kapsamda çalışmada şu sorulara yanıt aranacaktır:

- Kuyruk bağımlılığı nedir ve finansal risk yönetimi açısından neden büyük öneme sahiptir?
- Kopula fonksiyonları ve Uç Değer Teorisi, ekstrem piyasa hareketlerini modellemek için nasıl entegre edilmektedir?
- Farklı kopula modelleri (Arşimedyen, Eliptik vb.) ekstrem risk davranışını yakalamada nasıl bir performans göstermektedir?
- Kopula tabanlı risk ölçümleri, geleneksel korelasyon bazlı ölçümlere göre daha gerçekçi tahminler sunmakta mıdır?

2. Kuyruk Bağımlılığı: Kavramsal Çerçeve

Kuyruk bağımlılığı, istatistiksel olarak iki rastgele değişkenin dağılımlarının uç (kuyruk) bölgelerindeki asimptotik davranışını ifade eder. X ve Y sürekli rastgele değişkenleri, sırasıyla F ve G marjinal kümülatif dağılım fonksiyonlarına sahip olsun. Bu iki değişken arasındaki ekstrem bağımlılık, Üst Kuyruk Bağımlılığı (λ_U) ve Alt Kuyruk Bağımlılığı (λ_L) katsayıları aracılığıyla tanımlanır. Üst kuyruk bağımlılığı, çok yüksek değerlere karşılık gelen eş zamanlı aşırı kazançların ortaya çıkma olasılığını ifade eder. Pozitif şokların veya spekülasyon balonlarının birlikte hareket ettiği piyasa yapılarında önemli bir rol oynar. Alt kuyruk bağımlılığı, bir değişkenin çok düşük değerlere indiği aşırı kayıp durumlarında diğer değişkenin de benzer şekilde aşırı düşük değer alma olasılığını ölçer. Bu bağlamda alt kuyruk bağımlılığı, özellikle piyasa çöküşleri, finansal kriz bulaşması ve negatif şokların yayılımı açısından önemlidir.

Joe (1997) tarafından formüle edilen üst kuyruk bağımlılığı, X değişkeninin belirli bir yüksek eşik değerini (u) aşması koşulu altında, Y değişkeninin de bu eşik aşma olasılığının limiti olarak tanımlanır:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)) \quad (1)$$

Benzer şekilde, finansal kriz dönemlerinde veya ayı piyasalarında önem kazanan alt kuyruk bağımlılığı, her iki değişkenin de belirli bir düşük eşik değerinin altında kalma olasılığının limitidir:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)) \quad (2)$$

Burada G^{-1} ve F^{-1} , ilgili dağılımların ters fonksiyonlarını (quantile fonksiyonları) temsil eder. $\lambda \in (0,1]$ olması durumu asimptotik bağımlılığı, $\lambda = 0$ olması durumu ise asimptotik bağımsızlığı gösterir.

Kuyruk bağımlılığı, finansal risk yönetiminde özellikle kriz dönemlerinde piyasaların nasıl birlikte hareket ettiğini anlamak açısından son derece önemli bir kavramdır. Bu önem birkaç temel noktada kendini gösterir:

i. Korelasyon Yanılsaması ve Çeşitlendirme Sorunu

Aralarında genellikle düşük korelasyon olduğu düşünülen varlıkların, stres dönemlerinde aynı yönde sert hareketler sergileyebildiği sıkça görülür. Poon vd. (2004) bu durumu “bağımlılığın asimetrik yapısı” olarak adlandırır. Eğer bir portföy yöneticisi sadece sakin dönemlerde hesaplanan ortalama korelasyona bakarak karar verirse, kriz zamanlarında ortaya çıkan güçlü alt kuyruk bağımlılığını ($\lambda_L > 0$) gözden kaçırabilir. Bu da çeşitlendirme stratejisinin beklenen korumayı sağlamamasına ve portföyün beklenenden çok daha büyük kayıplarla karşılaşmasına yol açar.

ii. VaR ve ES Gibi Risk Ölçümlerinin Gerçekçiliği

Riske Maruz Değer (VaR) ve Beklenen Kayıp (ES) gibi ölçütler, özellikle dağılımın uç kısımlarına oldukça duyarlıdır. Ancak literatürde sık kullanılan Gaussian kopula modeli, yapısı gereği kuyruk bağımlılığını sıfır varsayar. Gerçek piyasa verilerinde ise çoğu zaman belirgin bir kuyruk bağımlılığı bulunur. Bu nedenle kuyrukları doğru yansıtmayan bir model, risk seviyelerini olduğundan düşük hesaplayabilir. Demarta ve McNeil (2005) çalışmasında da vurgulandığı gibi, bu durum finansal kurumların beklenmedik şoklar karşısında yetersiz sermaye tutmasına neden olabilir.

iii. Sistemik Risk ve Finansal Bulaşma İlişkisi

Kuyruk bağımlılığı aynı zamanda finansal sistemde bulaşmanın ve yayılma etkilerinin matematiksel karşılığıdır. Bir piyasada yaşanan aşırı bir şokun başka piyasalara ne derece sıçrayabileceği, büyük ölçüde kuyruk bağımlılığı katsayısı ile açıklanır. Bu nedenle λ_L değerindeki artış, finansal sistemde kırılganlığın yükseldiğine işaret eder. Düzenleyici otoritelerin kuyruk bağımlılığı ölçütlerini “erken uyarı sinyali” olarak değerlendirmesi de bu yüzden yaygınlaşmıştır.

3. Kopula Aileleri ve Kuyruk Bağımlılığı Yapıları

Kuyruk bağımlılığı parametrelerinin hesaplanmasında ve modellenmesinde Kopula (Copula) teorisi önemli bir rol oynar. Sklar Teoremi'ne (Sklar, 1959), göre çok değişkenli bir dağılım, marjinal dağılımlar ile bu marjinaller arasındaki bağımlılığı tanımlayan bir kopula fonksiyonu aracılığıyla ifade edilebilir. Dolayısıyla, seçilen kopula ailesi yalnızca bağımlılık düzeyini değil, aynı zamanda özellikle uç değer davranışının (extreme dependence) şeklini de belirler. Bu nedenle farklı kopula aileleri, Uç Değerler Kuramı (EVT) perspektifinden bakıldığında farklı risk karakteristiklerini temsil eder.

Nelsen (2006), kuyruk bağımlılığı katsayılarının kopula fonksiyonu üzerinden şu şekilde türetilbileceğini göstermiştir:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad \text{ve} \quad \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (3)$$

Bu formül, farklı kopula ailelerinin neden farklı risk yapılarını temsil ettiğini açıklar. Örneğin, finansal modellemede sıklıkla kullanılan Gumbel Kopula, güçlü bir üst kuyruk bağımlılığı sergilerken ($\lambda_U > 0, \lambda_L = 0$); Clayton Kopula yalnızca alt kuyruk bağımlılığına sahiptir ($\lambda_L > 0, \lambda_U = 0$).

Kopula fonksiyonları, çok değişkenli dağılımların bağımlılık yapısını esnek bir biçimde modelleme imkanı sunmaktadır. Literatürde en yaygın kullanılan kopula aileleri; eliptik kopulalar, Arşimedyen (Archimedean) kopulalar ve aşırı değer (extreme value) kopulaları olmak üzere üç ana başlık altında toplanmaktadır.

i. Eliptik Kopulalar

Eliptik kopulalar ailesi, iki değişkenli normal kopula ile iki değişkenli t kopulasını kapsamaktadır. Bu kopulalar, simetrik bağımlılık yapılarının modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. İki değişkenli normal kopula aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$C(u_1, u_2) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad (4)$$

Burada, Φ_ρ , doğrusal korelasyon katsayısı ρ olan iki değişkenli standart normal dağılımın dağılım fonksiyonunu; Φ^{-1} ise standart normal dağılımın

ters dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Normal kopulanın en temel özelliği, bağımlılığı yalnızca doğrusal korelasyon üzerinden açıklaması ve kuyruk bağımlılığını yakalayamamasıdır. Bu eksiklik, kalın kuyruklara ve uç değerlerde eş-hareketliliğe duyarlı olan t kopulası ile büyük ölçüde giderilmektedir.

Eliptik kopulalar, finansal risk yönetimi literatüründe bağımlılık yapılarını modellemek için en sık kullanılan yaklaşımlardan biridir. Bu kopula ailesinin temel özelliği, bağımlılık yapısını eliptik dağılımlardan (örneğin çok değişkenli Normal ve çok değişkenli Student-t dağılımı) türetmesi ve dolayısıyla bağımlılığı *simetrik* bir biçimde temsil etmesidir. Simetrik bağımlılık, değişkenlerin uç noktadaki (hem alt hem de üst kuyruklarda) birlikte hareket olasılıklarının aynı olduğu anlamına gelir. Finansal getirilerin kriz dönemlerinde hem pozitif hem negatif yönlü aşırı hareketlere maruz kalabileceği göz önüne alındığında, bu özellik eliptik kopulaları özellikle stres dönemlerinin analizi açısından önemli bir araç haline getirir (Demarta & McNeil, 2005).

Gaussian (Normal) Kopula ve Sınırlılıkları:

Eliptik kopulaların en bilinen üyesi olan Gaussian kopula, uzun yıllar boyunca portföy riski, kredi riski ve türev fiyatlamada bağımlılık için varsayılan yaklaşım olarak kullanılmıştır (Embrechts, McNeil & Straumann, 2002). Gaussian kopulanın temel üstünlüğü, matematiksel olarak son derece esnek ve hesaplamasının kolay olmasıdır. Ancak normal dağılıma dayalı olması nedeniyle kuyruk bağımsızlığı özelliğine sahiptir; yani değişkenler uç bölgelerde birlikte aşırı değer alma eğilimi göstermez. Bu özellik, 2007-2009 Küresel Finansal Krizi sırasında ciddi şekilde eleştirilmiştir; çünkü piyasalarda yaşanan eşanlı çöküşler Gaussian kopulanın varsaydığı bağımlılık yapısı ile uyuşmamıştır (Salmon, 2012).

Dolayısıyla Gaussian kopula, normal koşullarda güvenilir tahminler üretse de, aşırı oynaklık ve kriz ortamlarında bağımlılığı olduğundan düşük göstererek riski sistematik biçimde göz ardı edebilir.

Student-t Kopulası: Kalın Kuyruklar ve Simetrik Kuyruk Bağımlılığı

Gaussian kopulanın eksikliklerini gidermek üzere geliştirilen Student-t kopulası, eliptik aile içinde finansal uygulamalarda en çok tercih edilen modellerden biridir. Bu kopula hem alt hem de üst kuyruklarda aynı büyüklükte pozitif kuyruk bağımlılığı sağlar; bu nedenle bağımlılığı simetrik bir biçimde temsil eder (Demarta & McNeil, 2005).

Student-t kopulanın en önemli parametrelerinden biri olan serbestlik derecesi (v), dağılımın kuyruk kalınlığını belirler. Serbestlik derecesi düştükçe kuyruklar kalınlaşır; bu da eşanlı aşırı getirilerin (joint extremes) görülme olasılığını artırır. Finansal kriz dönemlerinde varlık fiyatlarının aynı anda hızla düşmesi gibi durumları yakalayabilmesi nedeniyle Student-t kopulası, sistemik risk ölçümleri (CoVaR, MES), portföy optimizasyonu ve stres testlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Aas & Berg, 2009).

Finansal risk yönetiminde Gaussian kopulasına kıyasla daha gerçekçi bir alternatif olan Student-t kopulası, hem alt hem de üst kuyruklarda pozitif ve simetrik bir bağımlılık sunar. Demarta ve McNeil (2005) tarafından vurgulandığı üzere, serbestlik derecesi (ϑ) düştükçe dağılımın kuyrukları kalınlaşır.

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{\vartheta+1} \left(-\sqrt{\vartheta+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \quad (5)$$

Serbestlik derecesinin küçük olması durumunda dağılımın kuyrukları kalınlaşır; bu da finansal piyasalarda aşırı kayıp ve kazançların aynı anda gerçekleşme olasılığını artırır (Demarta ve McNeil, 2005).

Eliptik kopulaların sunduğu simetrik bağımlılık yapısı, finansal analizlerde hem avantaj hem de sınırlılık yaratabilir. Pozitif ve negatif ekstrem getirilerin aynı derecede bulaşma eğilimi taşıdığı varsayımı, bazı piyasalarda oldukça gerçekçi olabilir; bu bağlamda eliptik kopulaların sunduğu simetrik bağımlılık yapısı avantaj sağlar. Örneğin küresel hisse senedi endeksleri büyük şoklara genellikle birlikte tepki verir (Longin & Solnik, 2001). Pek çok finansal ilişkide bağımlılık yapısının asimetrik olması ise bir sınırlılıktır. Örneğin döviz kuru-borsa ilişkisi veya petrol fiyatı-enflasyon ilişkisi sıklıkla alt kuyruğa daha duyarlıdır. Bu tür durumlarda eliptik kopulalar bağımlılık yapısını fazla “düzleştirerek” asimetrik riski gizleyebilir (Patton, 2006). Bu nedenle eliptik kopulaların kullanımı, finansal serilerin yapısına ve araştırmanın amacına göre dikkatle değerlendirilmelidir.

ii. Arşimedyan (Archimedean) Kopulalar

Arşimedyan kopulalar, özellikle tek taraflı kuyruk bağımlılığının modellenmesinde sağladıkları esneklik nedeniyle finans, sigortacılık ve hidroloji gibi birçok alanda yoğun biçimde kullanılmaktadır. Bu kopula ailesinin genel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \quad (6)$$

Burada üreteç (generator) fonksiyonu $\varphi: (0,1] \rightarrow [0, \infty)$ sıkı biçimde azalan ve konveks bir fonksiyondur ve $\varphi(1) = 0$ koşulunu sağlamaktadır. Ayrıca, $t \geq \lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)$ için $\varphi^{-1}(t) = 0$ olduğu varsayılmaktadır.

Bu aileye ait en yaygın kopulalar Clayton, Gumbel ve Frank kopulalarıdır. Clayton kopulası alt kuyruk bağımlılığını, Gumbel kopulası ise üst kuyruk bağımlılığını yakalama konusunda üstünlük sağlarken; Frank kopulası simetrik ancak kuyruk bağımlılığı içermeyen bir bağımlılık yapısını temsil etmektedir. Bu özellikleri sayesinde Arşimedyen kopulalar, asimetric bağımlılık yapılarının modellenmesinde eliptik kopulalara kıyasla önemli avantajlar sunmaktadır.

Clayton Kopulası:

Clayton (1978) tarafından önerilen bu fonksiyon, özellikle alt kuyrukta güçlü bir bağımlılık sergilerken, üst kuyrukta asimptotik bağımsızlık varsayar. Clayton kopulası alt kuyruk bağımlılığını güçlü biçimde yansıtan yapısı nedeniyle, varlık fiyatlarının aynı anda sert düşüşler gösterdiği dönemleri modellemek için uygundur. $\theta \in (0, \infty)$ bağımlılık parametresi olmak üzere:

$$\lambda_L = 2^{-1/\theta}, \lambda_U = 0 \quad (7)$$

Burada $\theta \rightarrow \infty$ iken $\lambda_L \rightarrow 1$ olur; yani bağımlılık parametresi arttıkça alt kuyruk bağımlılığı güçlenir.

Gumbel Kopulası:

Gumbel (1960) kopulası ise Clayton'ın aksine, üst kuyruk bağımlılığını dikkate alırken, alt kuyruk bağımlılığını sıfır kabul eder. Bu asimetri, spekülative piyasa balonları gibi pozitif şokların birlikte hareket ettiği durumlar için uygundur. $\theta \in [1, \infty)$ olmak üzere:

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}, \lambda_L = 0 \quad (8)$$

Frank Kopula:

Hem pozitif hem negatif bağımlılığa izin veren esnek bir yapısı vardır ancak Gaussian kopula gibi, uç noktalarda asimptotik bağımsızlık sergiler ($\lambda_L = \lambda_U = 0$). Bu nedenle, uç olayların eş zamanlılığını modellemek için uygun değildir

iii. Aşırı Değer (Extreme Value) Kopulaları

Bağımsız ve özdeş dağılıma sahip (iid) rassal değişkenlerden oluşan serilerde, her bir değişken için gözlenen maksimum değerlerin uygun

dönüşümlerle ortak bir yapıya taşınması sonucu elde edilen limit dağılımların modellenmesinde, iki değişkenli aşırı değer (bivariate extreme value – BEV) kopulaları kullanılmaktadır.

Bu kopula ailesi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ -V \left(\frac{-1}{\log u_1}, \frac{-1}{\log u_2} \right) \right\} \quad (9)$$

Burada bağımlılık yapısını belirleyen fonksiyon,

$$-V(x, y) = \int_0^1 \max \left\{ \frac{w}{x}, \frac{1-w}{y} \right\} 2dH(w) \quad (10)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. H , destek kümesi $[0,1]$ olan ve beklenen değeri $1/2$ olan bir dağılım fonksiyonudur.

BEV kopulalarının temel sınırlılığı, uç değerlerde bağımlılık bulunmasına rağmen limitte bağımsızlık sergileyen bağımlılık yapılarını yeterince temsil edememesidir (Dupuis ve Jones, 2006). Bu nedenle, özellikle finansal piyasalarda uç risklerin modellenmesinde dikkatli kullanılması gerekmektedir.

4. Uygulama: BIST Sınai Endeksi ve Usd/Try Piyasalarında Kuyruk Bağımlılığı ve Risk Analizi

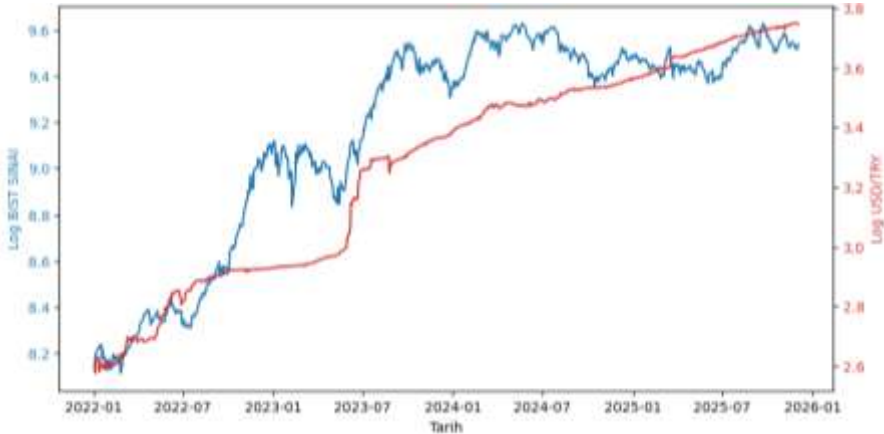
Bu bölümde, teorik çerçevesi sunulan metodoloji, Borsa İstanbul Sınai Endeksi (BIST Sınai) ve USD/TRY döviz kuru verileri kullanılarak test edilmiştir. Analizde hem bu iki değişken arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymak hem de bağımlılığın zayıf olduğu durumlarda bile marjinal kuyruk risklerinin portföy performansını nasıl etkilediğini göstermek amaçlanmıştır.

Çalışmada gerçekleştirilen tüm ampirik analizler, açık kaynak kodlu *Python programlama dili* ve ilgili ekonometrik kütüphaneler kullanılarak yürütülmüştür. Veri ön işleme sürecinde ham verilerin temizlenmesi, düzenlenmesi ve logaritmik getiri serilerinin elde edilmesi aşamalarında *Pandas* ve *NumPy* kütüphanelerinden yararlanılmıştır. Serilere ilişkin tanımlayıcı istatistiklerin hesaplanması ile Jarque–Bera normallik testlerinin uygulanmasında *SciPy (Stats)* modülü temel araç olarak kullanılmıştır.

Bağımlılık yapısının modellenmesi aşamasında Gaussian, Clayton, Gumbel ve Student-t kopula modelleri maksimum olabilirlik yöntemi (MLE) ile tahmin edilmiş; bu süreçte *SciPy (Optimize)* kütüphanesinde yer alan Nelder–Mead algoritmasından faydalanılmıştır. Model performanslarının karşılaştırılmasında kullanılan AIC ve BIC bilgi kriterleri, tahmin edilen log-yoğunluk fonksiyonları esas alınarak Python ortamında manuel olarak hesaplanmıştır. Son aşamada ise Riske Maruz Değer (VaR) hesaplamaları ile elde edilen ampirik bulguların görselleştirilmesinde *Matplotlib* ve *Seaborn* kütüphaneleri kullanılmış; böylece piyasa verilerinde gözlenen şişman kuyruk yapıları ve asimetrik saçılımlar akademik standartlara uygun biçimde raporlanmıştır.

4.1. Veri Seti

Çalışmada kullanılan Borsa İstanbul Sınai Endeksi (BIST Sınai) ve USD/TRY döviz kuru değişkenlerine ait 03.01.2022–03.12.2025 dönemini kapsayan 981 günlük gözlem değerleri tr.investing.com sitesinden derlenmiştir. Öncelikle değişkenlerin logaritmaları alınmış ve zaman serisi grafikleri çizilerek Şekil 1’de sunulmuştur.

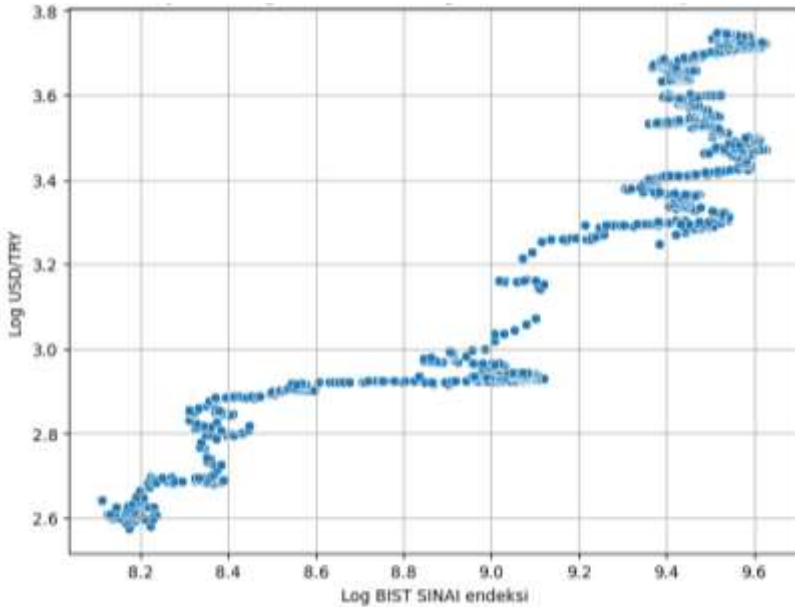


Şekil 1. Değişkenlere ait zaman serisi grafikleri

Şekil 1’de sunulan grafik incelendiğinde, BIST Sınai Endeksi ve USD/TRY kuru uzun vadeli bir yükseliş trendi göstermektedir. BIST Sınai

Endeksinin döviz kuruna göre çok daha dalgalı bir seyir izlediği ve dönem dönem kur hareketlerinden ayrıştığı (decoupling) dikkat çekmektedir.

Şekil 2’de yer alan saçılım grafiği, BIST Sınai Endeksi ile USD/TRY kuru arasındaki ilişkinin özellikle uç değer bölgelerinde doğrusal korelasyon varsayımının dışına çıktığını göstermektedir. Grafiğin sağ üst bölümünde her iki değişkenin eş zamanlı ve güçlü biçimde yükseldiği ortak aşırı hareketler dikkat çekmekte, bu durum ise üst kuyruk bağımlılığının varlığına işaret etmektedir. Buna karşılık, her iki serinin birlikte gerilediği sol alt uç bölgede gözlenen kümelenmenin daha sınırlı olduğu görülmektedir. Ortaya çıkan bu asimetrik yapı, stres ve kriz dönemlerinde varlıklar arasındaki ilişkilerin doğrusal korelasyon çerçevesiyle yeterince açıklanamayabileceğini ve korelasyon yapısında bozulmaların ortaya çıkabileceğini göstermektedir. Bu yönüyle grafik, geleneksel korelasyon temelli risk ölçüm yaklaşımlarının ekstrem piyasa koşullarında neden yetersiz kaldığını görsel olarak da destekler niteliktedir.



Şekil 2. Log BIST Sınai endeksi ve Log USD/TRY arasındaki ilişki

Getiri serilerine ait tanımlayıcı istatistikler ve Jarque-Bera testi sonuçları ise Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1: Getiri Serilerine Ait Tanımlayıcı İstatistikler

	BIST SİNAİ ENDEKSİ	USD/TRY
Ortalama	% 0,14	% 0,12
Standart Sapma	% 1,89	% 0,55
Çarpıklık (Skewness)	-0,45	2,17
Basıklık (Kurtosis)	8,43	59,69
Jarque-Bera Testi	$p < 0,001$	$p < 0,001$

Tablo 1’de sunulan tanımlayıcı istatistikler, her iki serinin de tipik finansal zaman serilerinde görülen “kalın kuyruk” yapısını güçlü biçimde sergilediğini göstermektedir. USD/TRY serisinin çarpıklık ve basıklık değerlerinin özellikle yüksek olması, döviz kurunda aşırı değerlerin sıradan bir normal dağılıma kıyasla çok daha sık yaşandığına işaret etmektedir. Bu bulgu, marjinal dağılımların normal varsayımı altında modellenmesinin uygun olmayacağını ve EVT tabanlı yaklaşımların gerekliliğini açık biçimde ortaya koymaktadır.

4.2. Bağımlılık Yapısının Modellenmesi

Finansal varlıklar arasındaki bağımlılık yapısını belirlemek amacıyla dört farklı kopula ailesi kapsamında modeller oluşturulmuştur. Simetrik bağımlılığı temsil eden Gaussian ve Student-t kopulaları ile alt kuyruk (kriz dönemleri) bağımlılığını yakalamaya yönelik Clayton ve üst kuyruk (şok dönemleri) bağımlılığını modelleyen Gumbel kopulaları tahmin edilmiştir. Elde edilen modellerin performansları, Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayes Bilgi Kriteri (BIC) esas alınarak karşılaştırılmış; karşılaştırma sonuçları Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2: Kopula Modellerinin Performans Karşılaştırması

Kopula Modeli	AIC	BIC
Gumbel	-819,56	-814.68
Gaussian	1,89	6.78
Clayton	2,01	6.89
Student-t	262,23	274.01

Analiz sonuçları değerlendirildiğinde, Gumbel kopulasının diğer modellere kıyasla en iyi uyumu sağladığı görülmektedir. Model seçimi için kullanılan her iki bilgi kriterinin (AIC ve BIC) de Gumbel modelini en uygun yapı olarak öne çıkarması, bu sonucun istatistiksel olarak tutarlı olduğunu göstermektedir.

Gumbel kopulası, AIC değeri (-819,56) ile en düşük skoru elde ederken, model karmaşıklığını daha güçlü biçimde cezalandıran BIC kriterinde de (-814,68) en iyi uyumu sağlamıştır. BIC'in de Gumbel modelini desteklemesi, modelin yalnızca yüksek bir uyum başarısı sergilemediğini, aynı zamanda parametre sayısı açısından da etkin ve dengeli bir yapı sunduğunu ortaya koymaktadır.

Bu bulgular, BIST Sınai Endeksi ile USD/TRY kuru arasındaki ilişkinin incelenen dönem itibarıyla özellikle üst kuyrukta yoğunlaşan bir bağımlılık yapısı sergilediğine işaret etmektedir. Gumbel modelinin asimetric yapısı, iki değişken arasındaki ilişkinin özellikle pozitif şoklar sırasında (hem kurda hem de hisse senedi piyasasında yükseliş dönemlerinde) daha güçlü hale geldiğini göstermektedir. Bu sonuçlar, simetrik bağımlılığı varsayan Gaussian ve alt kuyruk bağımlılığına odaklanan Clayton kopulalarının, piyasanın bu yönlü asimetric dinamiklerini açıklamada sınırlı kaldığını ortaya koymaktadır.

4.3. Risk Ölçümü ve Bulguların Tartışılması

Uygulamanın önemli bir aşaması da, tespit edilen asimetric bağımlılık yapısının ve marjinal dağılımlardaki sapmaların portföy riski üzerindeki somut etkisinin ölçülmesidir. Bu amaçla, eşit ağırlıklı bir portföy için %99 güven düzeyinde Riske Maruz Değer (VaR) hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3'te sunulmuştur.

Analiz sonuçlarına göre, geleneksel normal dağılıma dayalı yöntem VaR'ı %2,18 olarak tahmin ederken, Gumbel kopulasına ve gerçekleşen marjinal kayıplara dayanan hibrit yaklaşım VaR'ı %2,65 olarak hesaplamıştır. İki yöntem arasında ortaya çıkan yaklaşık %21 oranındaki bu sapma (Risk Açığı), geleneksel modellerin finansal riski önemli ölçüde eksik tahmin ettiğini (underestimation) göstermektedir.

Tablo 3: VaR Karşılaştırması ve Risk Açığı

Yöntem	Tahmin Edilen VaR (%)
Geleneksel Yöntem (Normal Dağılım)	-% 2,18
Hibrit/Gerçekleşen Risk	-% 2,65
Risk Açığı (Eksik tahmin-underestimation)	% 0,47

Elde edilen bulgular, risk tahminindeki bu sapmanın iki temel kaynağa dayandığını göstermektedir. İlk olarak, analizde belirlenen Gumbel kopulası yapısı, piyasalardaki etkileşimin özellikle şok dönemlerinde simetrik bir yapıdan uzaklaştığını ve asimetrik bir bağımlılık sergilediğini ortaya koymaktadır. İkinci ve daha belirleyici unsur ise marjinal dağılımlarda gözlenen ve 3'ün üzerinde gerçekleşen aşırı basıklık (kurtosis) değerleridir.

Geleneksel yaklaşım, hem varlıkların kendi dağılımlarını hem de aralarındaki bağımlılık yapısını normal kabul ederek, bu iki önemli risk kaynağını birlikte göz ardı etmektedir. Buna karşılık, bu çalışmada tespit edilen yaklaşık %21'lik risk açığı, finansal riskin yalnızca piyasalar arası korelasyondan kaynaklanmadığını; aynı zamanda varlıkların kendi içsel dinamiklerinin ve şişman kuyruk özelliklerinin de riskin oluşumunda en az o ölçüde belirleyici olduğunu göstermektedir. Bu bulgu, giriş bölümünde tartışılan “normallik varsayımının yetersizliği” görüşünü ampirik olarak desteklemekte; ayrıca risk yönetiminde yalnızca doğru bağımlılık yapısının (kopula) belirlenmesinin yeterli olmadığını, marjinal risklerin de EVT tabanlı yöntemlerle modellenmesinin gerekli olduğunu ortaya koymaktadır.

5. Sonuç ve Değerlendirme

Finansal piyasaların giderek daha karmaşık bir yapıya sahip olması, risk yönetiminde temel alınan normal dağılım varsayımına dayalı standart yaklaşımların sınırlılıklarını açık biçimde ortaya koymaktadır. Bu çerçevede çalışmada, BIST Sınai Endeksi ile USD/TRY döviz kuru arasındaki ilişki, geleneksel yöntemlerin ötesine geçilerek uç değer davranışlarına odaklanan Aşırı Değer Teorisi (EVT) ve bağımlılık yapısını esnek biçimde modellemeye imkan tanıyan kopula fonksiyonları aracılığıyla analiz edilmiştir.

Analiz sonuçları, incelenen dönem boyunca BIST Sınai Endeksi ile USD/TRY döviz kuru arasındaki ilişkinin simetrik bir yapı sergilemediğini; aksine, üst kuyruk bağımlılığını esas alan Gumbel Kopulası tarafından en iyi şekilde temsil edildiğini göstermektedir. Bu istatistiksel bulgunun ekonomik açıdan da son derece anlamlı olduğu görülmektedir. Türkiye finansal piyasalarında döviz kurlarında meydana gelen keskin artışların çoğu zaman hisse senedi piyasasında da yukarı yönlü hareketlerle birlikte gerçekleştiği tespit edilmiştir. Bu durum, yatırımcıların kur şoklarına karşı hisse senetlerini

bir tür “enflasyona karşı korunma aracı” olarak değerlendirme eğiliminde olduklarına ve şirket bilançolarındaki yeniden değerlendirme süreçlerinin piyasa fiyatlarına pozitif yansıdığına işaret etmektedir. Dolayısıyla iki piyasa arasındaki ilişki, kriz dönemlerinde zayıflamak yerine özellikle yukarı yönlü şoklar sırasında güçlenen asimetrik bir karakter taşımaktadır.

Çalışmanın bir diğer bulgusu, literatürde sıklıkla vurgulanan ancak uygulamada çoğu zaman göz ardı edilen “görünmeyen riskin” büyüklüğüdür. Varlıklar arasındaki bağımlılık yapısının yanı sıra, her bir varlığın kendi içsel oynaklık dinamikleri de toplam risk düzeyinin olduğundan düşük algılanmasına neden olmaktadır. İncelenen veri setinde Mandelbrot’un (1963) “şişman kuyruk” (fat-tail) olarak tanımladığı dağılım yapısı açık biçimde gözlemlenmiş; normal dağılım varsayımı altında geliştirilen geleneksel risk modellerinin portföy riskini yaklaşık %21 oranında eksik tahmin ettiği belirlenmiştir. McNeil ve Frey (2000) tarafından da vurgulandığı üzere, standart risk ölçüm yaklaşımlarının ekstrem piyasa koşulları altında yetersiz kalması, finansal kurumlar açısından ciddi bir “sermaye açığı” riski doğurmaktadır.

Sonuç olarak finansal risk yönetimi, basit korelasyon katsayılarıyla açıklanamayacak ölçüde çok boyutlu ve dinamik bir yapıya sahiptir. Bu çalışmada tespit edilen Gumbel tipi bağımlılık yapısı ile yüksek basıklık değerleri, portföy yöneticileri ve düzenleyici otoritelerin mevcut risk ölçüm yaklaşımlarını yeniden gözden geçirmeleri gerektiğini açık biçimde ortaya koymaktadır. Nelsen (2006) ve Patton (2006) tarafından vurgulanan metodolojik dönüşüm çerçevesinde; marjinal dağılımların esnekliğini koruyan ve uç değerlerdeki asimetrik bağımlılığı duyarlılıkla yakalayabilen EVT tabanlı hibrit modellerin kullanımı, finansal istikrarın güçlendirilmesi bakımından kaçınılmaz bir gereklilik olarak öne çıkmaktadır.

Kaynaklar

- Aas, K., & Berg, D. (2009). Models for construction of multivariate dependence-a comparison study. *The European Journal of Finance*, 15(7-8), 639-659. <https://doi.org/10.1080/13518470802588767>
- Büyükyılmaz, A. (2016). Some Archimedean copulas on producer price index and consumer price index: A case of Turkey. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 1(13), 206-215.
- Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease. *Biometrika*, 65(1), 141-151.
- Çelik, S. (2022). Copula ile portföy riskinin hesaplanması: BİST100 ve USD kuru üzerine bir uygulama. *International Journal of Applied Economic and Finance Studies*, 7(2), 1-14.
- Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111-129. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2005.tb00254.x>
- Dupuis, D. J., & Jones, B. L. (2006). Multivariate extreme value theory and its usefulness in understanding risk. *North American Actuarial Journal*, 10(4), 1-27.
- Embrechts, P., McNeil, A. J., & Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In M. A. H. Dempster (Ed.), *Risk management: Value at risk and beyond* (pp. 176-223). Cambridge University Press.
- Farnoudkia, H., & Purutçuoğlu, V. (2020). Application of R-vine copula method in Istanbul stock market data: A case study for the construction sector. *Journal of Turkish Operations Management*, 4(2), 509-518.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698-707.
- Gülöksüz, Ç. T. (2016). Dolar kuru ile tüketici fiyat endeksi arasındaki ilişkinin Archimedean kapula ile modellenmesi. *Bankacılık ve Sigortacılık Araştırmaları Dergisi*, 2(7), 53-62. https://doi.org/10.1501/bsad_00000000020
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall.
- Karakas, A., & Doğan, M. (2017). With copula function analysis of structure dependence relation between exchange rate of dollars and deposit rate of Turkey. *Natural Science and Discovery*, 3(1), 1-12. <https://doi.org/10.20863/nsd.297636>

- Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*, 56(2), 649–676.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton University Press.
- Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2nd ed.). Springer.
- Özgür, C., & Sarıkovanlı, V. (2021). An application of regular vine copula in portfolio risk forecasting: Evidence from Istanbul Stock Exchange. *Quantitative Finance and Economics*, 5(3), 452–470. <https://doi.org/10.3934/QFE.2021020>
- Patton, A. J. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 130–168.
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47, 527–556. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-2354.2006.00387.x>
- Poon, S. H., Rockinger, M., & Tawn, J. (2004). Extreme value dependence in financial markets: Diagnostics, models, and financial implications. *Review of Financial Studies*, 17(2), 581–610.
- Salmon, F. (2012). The formula that killed Wall Street. *Significance*, 9(1), 16–20.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges [Distribution functions of n dimensions and their margins]. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.
- Ünal, T. (2022). Modeling the dependence structure of financial data with a copula: Electricity index – an example of the dollar exchange rate. *AYBU Business Journal*, 2(1), 35–45.
- Yıldırım Külekci, B., Poyraz, G., Gür, İ., & Evkaya, O. (2023). BIST100 bankacılık sektöründeki bağımlılığın asma kopula ile incelenmesi. *İstanbul İktisat Dergisi*, 73(1), 55–82. <https://doi.org/10.26650/ISTJECON2022-1229039>