

BÖLÜM 1

NİCEL KARAR MODELLERİ İÇİN LÉVY SÜREÇLERİNE GİRİŞ: KURAMSAL ÇERÇEVE*

Akbar BARATI CHİYANEH¹, Hamit MİRTAGİOĞLU²,
Yıldırım DEMİR³

Özet

Nicel karar verme modellerinde belirsizliğin doğru modellenmesi, ekonomik ve finansal sistemlerin analizi açısından kritik bir öneme sahiptir.

* Bu çalışma, “Finansal modellemede jump difüzyon ve pure jump süreçleri uygulaması” başlıklı yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

1Dr. Öğr. Üyesi, Uygulamalı Matematik Bölümü, Matematik, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Fakültesi, Tebriz Üniversitesi, Tebriz, İran. E-posta: baratiakbar@tabrizu.ac.ir, baratiakbar@yahoo.com| ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4401-5477>

2 Prof. Dr., İstatistik, Fen Edebiyat Fakültesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Bitlis, Türkiye.

E-posta: hmirtagioglu@beu.edu.tr, hamitsa86@gmail.com| ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2952-9584>

3 Doç. Dr., Ekonometri Bölümü, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, Türkiye. E-posta: ydemir@yyu.edu.tr, ydemir.yyu@gmail.com | ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6350-8122>



Lisans: Creative Commons Atıf 4.0 Uluslararası (License: Creative Commons Attribution 4.0 International) (CC BY 4.0).

Açık Erişim / Open Access.

DOI (kitap): <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220>

Tavsiye Edilen Atıf / Recommended Citation:

Barati Chiyaneh, A., Mirtagioglu, H. ve Demir, Y. (2025). Nicel Karar Modelleri İçin Lévy Süreçlerine Giriş: Kuramsal Çerçeve. E. Hayat (Ed.), Nicel Karar Vermede İleri İstatistiksel Yaklaşımlar içinde (ss. 1-36). Turkuaz Yayınları. <https://doi.org/10.63127/tuaz.by.220.c163>

Geleneksel modellerde sıklıkla kullanılan Brownian hareketi, finansal piyasalarda gözlenen ani fiyat sıçramaları, volatilité kümelenmesi ve ağır kuyruk dağılımları gibi karmaşık olguları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu çalışma, sürüklenme, difüzyon ve sıçrama bileşenlerini tek bir çatı altında toplayan Lévy süreçlerinin kuramsal çerçevesini sunmayı amaçlamaktadır. Çalışmada; stokastik süreçlerin tarihsel gelişimi, Lévy-Itô ayrışımı, Lévy-Khinchine formülü ve süreçlerin matematiksel özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Deterministik yaklaşımların sınırlılıklarına alternatif olarak sunulan bu teorik altyapı, modern finans, risk analizi ve türev ürün fiyatlaması gibi alanlarda geliştirilecek modeller için temel oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Nicel Karar Modelleri, Stokastik Süreçler, Lévy Süreçleri, Brownian Hareketi, Finansal Modelleme.

INTRODUCTION TO LÉVY PROCESSES FOR QUANTITATIVE DECISION MODELS: THEORETICAL FRAMEWORK

Abstract

Introduction to Lévy Processes for Quantitative Decision Models: Theoretical Framework Accurate modeling of uncertainty in quantitative decision-making models is critical for the analysis of economic and financial systems. Brownian motion, frequently used in traditional models, falls short in explaining complex phenomena observed in financial markets such as sudden price jumps, volatility clustering, and heavy-tailed distributions. This study aims to present the theoretical framework of Lévy processes, which integrate drift, diffusion, and jump components within a unified structure. The study examines the historical development of stochastic processes, Lévy-Itô decomposition, the Lévy-Khinchine formula, and the mathematical properties of these processes in detail. This theoretical infrastructure, presented as an alternative to the limitations of deterministic approaches, constitutes the foundation for models to be developed in areas such as modern finance, risk analysis, and derivative pricing.

Keywords: Quantitative Decision Models, Stochastic Processes, Lévy Processes, Brownian Motion, Financial Modeling.

1. Giriş

Nicel karar verme modelleri, ekonomik ve finansal sistemlerdeki belirsizliği matematiksel olarak temsil eden yapılara dayanmaktadır. Bu tür modellerde kullanılan stokastik süreçlerin doğru seçilmesi, karar mekanizmalarının gerçekçi sonuçlar üretmesi açısından kritik öneme sahiptir. Klasik modellerde belirsizlik çoğunlukla sürekli dalgalanmaları temsil eden Brownian hareketi üzerinden tanımlanmaktadır. Böylece varlık fiyatlarının zamana bağlı rastlantısal yapısı difüzyon süreçleri ile modellenmiştir ancak finansal piyasalarda gözlenen ani fiyat sıçramaları, ağır kuyruk dağılımları, volatilité kümelenmesi ve asimetric getiri davranışları, yalnızca Brownian hareketi ile açıklanamamaktadır (Cont ve Tankov, 2004; Schoutens, 2003).

Stokastik süreçler, rastlantısal olayların zaman içindeki dinamiklerini modellemeyi amaçlayan modern olasılık kuramının temel unsurlarından biridir. Rastgele değişkenlerin tekil gözlemlerinden farklı olarak zaman boyunca elde edilen veri dizilerinin analizi, sürecin hem yapısal hem de fonksiyonel özelliklerinin incelenmesini zorunlu kılmaktadır (Fristedt ve Gray, 1997). Bu doğrultuda stokastik süreçler yalnızca teorik matematiğin değil, finansal piyasalardan mühendisliğe, sigorta matematiğinden biyolojik sistemlere kadar pek çok alanın vazgeçilmez araçlarından biri hâline gelmiştir.

Stokastik süreçlerin matematiksel temelleri 19. yüzyılın sonlarında Louis Bachelier'nin finansal varlık fiyatlarını Brownian hareketi ile ifade ettiğı çalışmasıyla atılmıştır. Daha sonra Wiener'in bu süreci matematiksel olarak geliştirmesi ve Kolmogorov'un ölçü kuramına dayalı olasılık yaklaşımı, stokastik süreçlerin tutarlı bir çerçeve içinde incelenmesine imkân sağlamıştır (Doob, 1953). Ancak deterministik modellerin oynaklık, ani sıçramalar, ağır kuyruk yapısı ve varyans değişkenliği gibi piyasalara özgü karmaşık olguları açıklamakta yetersiz kalması, daha gelişmiş stokastik süreçlere olan ihtiyacı doğurmuştur (Hull, 2001).

Bu bağlamda Lévy süreçleri, modern nicel karar verme modellerinde önemli bir yer edinmiştir. Lévy süreçleri; sürüklenme, difüzyon ve sıçrama bileşenlerini aynı çatı altında toplayan, bağımsız ve durağan artışlara sahip, sonsuz bölünebilir dağılımlarla ilişkilendirilen geniş bir stokastik süreç sınıfını ifade etmektedir (Sato, 1999; Applebaum, 2004). Lévy-Itô ayrışımı

sayesinde her Lévy sürecinin bir Brownian hareketi, deterministik bir sürüklenme terimi ve çeşitli büyüklüklerde sıçramalar içeren Poisson tipi bir yapı ile temsil edilebilmesi, finansal verilerin ampirik özellikleriyle güçlü bir uyum sunmaktadır.

Finansal piyasalarda gözlenen ağır kuyruklu dağılımlar, çarpıklık, ani fiyat sıçramaları ve yüksek oynaklık dönemleri gibi ampirik olgular, Lévy süreçlerinin kullanımını özellikle cazip hâle getirmektedir (Schoutens, 2003). Brownian hareketinin hafif kuyruk yapısının aksine, Lévy süreçleri bu tür dağılım özelliklerini doğal biçimde modelleyebilmektedir. Bu nedenle portföy optimizasyonu, türev ürün fiyatlaması, kredi riski analizi, sigorta matematiği, stokastik kontrol teorisi, optimal durdurma problemleri, gerçek opsiyon yaklaşımı ve firma değerlemesi gibi pek çok alanda Lévy temelli süreçler yaygın olarak kullanılmaktadır (Cont ve Tankov, 2004; Applebaum, 2004).

Opsiyon fiyatlama teorisinde Black ve Scholes'un (1973) geometrik Brownian hareketi temelli modeli önemli bir dönüm noktası olmakla birlikte, piyasadaki sıçrama davranışlarını içermemesi modelin temel sınırlılıklarından biri olmuştur. Bu durum, daha gerçekçi fiyatlama modellerinin oluşturulmasında Lévy süreçlerinin kullanımına yönelik güçlü bir motivasyon sağlamıştır.

Bu bölümde öncelikle stokastik süreçlerin tarihsel gelişimi ve belirsizlik altında karar verme bağlamındaki önemi ele alınmış; deterministik yapıların finansal verileri açıklamadaki yetersizlikleri tartışılmıştır. Ardından Lévy süreçlerinin matematiksel temeli, ana özellikleri ve modern finans uygulamalarındaki rolü açıklanmıştır. Bölümün devamında olasılık uzayı, filtrasyon yapısı, martingale kavramı, Poisson süreci, Brownian hareketi ve Lévy süreçlerinin teorik altyapısı ayrıntılı olarak incelenmektedir. Daha sonra Lévy-Khinchine formülü, Lévy ölçüsü ve süreçlerin yörünge özellikleri detaylandırılmaktadır. Böylece çalışmanın sonraki bölümlerinde geliştirilecek nicel karar ve finans modelleri için gerekli teorik temel oluşturulması hedeflenmektedir.

2. Rastgele Süreçlerin Temelleri

Stokastik süreçler, zaman parametresi tarafından rastgele değişkenlerin matematiksel modellenmesini sağlayan olasılık teorisinin temel dallarından

biridir. Tekil rastgele değişkenlerden farklı olarak, bir sürecin zaman boyunca izlenmesi; örnek yörüngeler, artışların dağılımı, süreksizlikler ve süreklilik gibi hem yapısal hem de niceliksel özelliklerin analitik olarak incelenmesini gerektirir. Bu nedenle stokastik süreçler finansal piyasalardan mühendisliğe, biyolojik sistemlerden sinyal işlemeye kadar geniş bir uygulama alanında vazgeçilmez bir konuma sahiptir (Fristedt ve Gray, 1997).

Tarihsel açıdan Bachelier'in finansal fiyat hareketlerinin Brownian hareketi ile modellenmesi, Wiener ve Kolmogorov'un teorik katkılarıyla stokastik süreçlerin modern matematiksel temelleri oluşturulmuştur (Doob, 1953). Günümüzde difüzyon bileşenleri ile sıçramaları aynı çatı altında toplayan Lévy süreçleri ve Lévy-Itô ayrışımı gibi yapılar, finansal verilerde gözlenen ağır kuyruk, çarpıklık ve ani sıçrama özelliklerini modelleyebilmek açısından sıkça tercih edilmektedir (Sato, 1999; Cont ve Tankov, 2004).

Bir stokastik süreç, her $t \in T$ için tanımlanmış rastgele değişkenler kümesidir.

$$X_t: t \in T$$

Burada, zaman parametresi (T) kesikli olabileceği gibi sürekli de olabilir. Bu çalışmada özellikle sürekli zamanlı stokastik süreçlere odaklanılmaktadır. Her bir gerçekleştirme, sürecin zaman içerisindeki bir örnek yörüngesini oluşturmakta ve bu yörüngeler süreç davranışını anlamada temel rol oynamaktadır (Fristedt ve Gray, 1997).

2.1. Olasılık Uzayı ve Temel Tanımlar

Matematiksel olarak bir stokastik sürecin tanımlanması için temel yapı bir olasılık uzayıdır. Bu uzay tipik olarak (Ω, F, P) ile tanımlanmakta ve bu yapının bir olasılık uzayı olduğu kabul edilmektedir. Burada: Ω , örnek uzayını; F , bu uzay üzerinde tanımlı bir sigma-alanını ve P ise sigma-alanı üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsünü ifade etmektedir (Doob, 1953; Klebaner, 2001).

Örnek uzayı (Ω): Deneyin tüm olası sonuçlarının kümesini,

Sigma-alanı (F): Olasılık ölçüsünün tanımlı olduğu alt kümeler ailesini,

Olasılık ölçüsü (P): Her $A \in F$ kümesine bir olasılık atayan fonksiyonu tanımlamaktadır.

Stokastik süreçlerin bu yapı üzerinde tanımlanması, süreçlerin ölçülebilirlik özelliklerinin incelenmesine imkân tanımaktadır. Özellikle filtrasyon, adaptasyon ve martingale kavramlarının tanımı bu temele dayanmaktadır (Protter, 2005).

2.2. Rastgele Değişken ve Rastgele Süreç Kavramı

Bir rastgele değişken, (Ω, F) örnek uzayındaki sonuçları $(R$ veya $R^d)$ reel sayılara eşleyen ölçülebilir bir fonksiyondur; yani her $(-\infty, a]$ tipi Borel kümesinin ters görüntüsü F içinde olmalıdır. Rastgele süreç ise zaman parametresine göre indekslenen rastgele değişkenler ailesini ifade etmektedir.

$$X = \{X_t: t \geq 0\}$$

Burada, her bir sabit t için X_t bir rastgele değişkeni ve her sabit $w \in \Omega$ için $t \rightarrow X_t(w)$ örnek yörüngesini vermektedir (Fristedt ve Gray, 1997). Her süreç, belirli bir zamanda sistemin durumunu temsil eder ve bu durumun nasıl evrildiği örnek yörüngeleri üzerinden gözlemlenir. Bu yörüngelerin düzenlilik koşulları (sürekli, Càdlàg, vb.) sürecin analizi açısından kritik rol oynamaktadır.

Sıçramalar, gözlemciler için gerçekleşme zamanı önceden tahmin edilemeyen rastgele olayları ifade etmektedir. Örneklem yörüngesi sol-sürekli olduğunda, yörünge boyunca t zamanına ulaşan bir gözlemci, t anındaki f değerini tahmin edebilir. Càdlàg (sağ-sürekli, sol limitli) fonksiyonlar sıçramalı süreçler için doğal olan örnek yörüngeleri vermektedir. Finansal uygulamalarda sıçramalar, ani ve öngörülemez olayları temsil etmeleri nedeniyle Càdlàg yapı tercih edilmektedir (Cont ve Tankov, 2004). Aşağıdaki tanım stokastik süreçlerin yörünge özelliklerini anlamak için önemlidir.

Bir $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonu, “Càdlàg” olarak adlandırılmakta, eğer sol taraftan gelen limit sınırlı ve sağ taraftan gelen limit sürekli ise her $t \in [0, T]$ için;

$$\lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s) = f(t-) \text{ soldan limit sınırlı,}$$

$\lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s) = f(t+)$ sağdan limit sürekli durumunu göstermekte ve $f(t) = f(t+)$ olduğu varsayılmaktadır.

Her sürekli fonksiyon C  dl  g bir fonksiyon olmasına rağmen sürekli olmayan (süreksiz) C  dl  g fonksiyonları da mevcuttur. Eğer t , bir sürekli olmayan nokta ise;

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t -)$$

olur.

Fonksiyonun t noktasında ani bir değişiklik göstermesi durumu f 'nin t noktasında sıçraması olarak tanımlanmaktadır. C  dl  g bir fonksiyon olan f , $\{t \in [0, T], f(t) \neq f(t-)\}$ durumunu, yani kümelerinden birinde süreksiz olma durumunu göstermektedir (Fristedt ve Gray, 1997). T_0 gibi bazı noktalarda ani değişiklikler gösteren bir basamak fonksiyonu C  dl  g bir fonksiyona örnektir. Fonksiyonun sıçrama noktalarındaki değeri, sıçramadan sonraki değer yani $\Delta f(T_0) = 1$ olarak tanımlanmaktadır.

Belirli bir sürekli $g: [0, T] \rightarrow R$ fonksiyonu ve sabit f_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) değerleri ile $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonu;

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

C  dl  g (sürekli artan limitli artıkları olan) bir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. $g(t)$, sıçramalarda eklenen f 'nin sürekli bileşeni olarak kabul edilmekte ve f 'nin sıçramaları t_i ($i \geq 1$) için $\Delta f(t_i) = f_i - f_{i-1}$ olarak hesaplanmaktadır. C  dl  g fonksiyonları sürekli ve sıçramalı kısımlar olarak net bir şekilde ayrılmasa da bu fonksiyonlar, sıçramalar içeren süreçlerin yörüngesini doğru bir şekilde modellemek için kullanılmaktadır.

t_i değeri sıçramadan sonraki değer olarak tanımlandığından sıçrama anlarında sağ-sürekli bir fonksiyon için kullanılır $f(t_i) = f(t_i +)$. Eğer $f(t_i)$ sıçramadan önceki değeri temsil ediyorsa, yani $f(t_i) = f(t_i -)$ ise o zaman sağ limiti C  gl  d olan bir sol sürekli fonksiyon elde edilir. Böylece, ‘‘sağ’’ zamanın daha sonraki bir anını ‘‘sol’’ ise zamanın daha önceki bir anını ifade etmektedir.

2.3. Süreçlerin Özellikleri: Artışlar, Bağımsızlık ve Durağanlık

Bir sürecin temel yapı taşlarından biri artış olup, herhangi bir stokastik süreç için artışlar $X_t - X_s$, $0 \leq s < t$ ile tanımlanmaktadır. Bu artışların dağılımı ve bağıntı yapısı sürecin sınıfını belirlemekte, “bağımsız ve durağan artışlar” birlikte ele alındığında Lévy süreçleri gibi güçlü sonuçlar ortaya çıkmaktadır (Sato, 1999).

Bağımsız artışlar: Kesişmeyen zaman aralıklarında eğer artışlar birbirinden bağımsızsa süreç *bağımsız artışlı süreç* olarak adlandırılmaktadır. Poisson süreci ve Brownian hareketi bu sınıfa girmektedir (Schoutens, 2003).

Durağan artışlar: Artışların dağılımının yalnızca aralığın uzunluğuna bağlı olması durumudur. Yani $X_{t+s} - X_s$ dağılımı yalnızca fark $(t - s)$ 'ye bağlıysa sürecin durağan artışlı olduğu belirlenmektedir. Bu özellik; süreçlerin zaman-homojen davranışlarını ifade etmekte ve Lévy süreçlerinin karakteristik özelliklerinden birisidir (Sato, 1999).

Bu iki özellik bir araya geldiğinde, sürecin artışları sonsuz bölünebilir dağılımlara taşımakta; dolayısıyla Lévy–Khintchine yapısı ve Lévy ölçüsü gibi kavramlar ortaya çıkmaktadır (Cont ve Tankov, 2004).

2.4. Beklenen Değer, Kovaryans ve Moment Fonksiyonları

Bir sürecin ortalaması, varyansı, kovaryansı ve yüksek mertebeden momentleri, sürecin dağılımsal yapısı hakkında önemli bilgiler sunmaktadır. Beklenen değer genel olarak $E[X] = \int X dP$ ile tanımlanmakta ve süreçlerin ortalama davranışını ortaya koymaktadır. Belirsizliğin ölçüsünü veren varyans, $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$ ve kovaryans, $Cov(X_s, X_t) = E[X_s X_t] - E[X_s] E[X_t]$ olur. Brownian hareketinde kovaryansların yapısı süreç sınıfını belirlemekte ve Brownian hareketi için $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$ olarak verilmektedir (Protter, 2005).

Özellikle finansal verilerin analizinde çarpıklık ve basıklık değerleri piyasanın ağır kuyruk veya simetri özelliklerinin anlaşılmasında kritik öneme sahiptir (Schoutens, 2003). Lévy süreçleri bağlamında Lévy–Khintchine formülü; sürüklenme terimi, Gaussian (difüzyon) bileşeni ve Lévy ölçüsü (sıçrama yoğunluğu) bileşenlerini ayırmaktadır. Bu ayırım momentlerin

varlığı, kuyruk davranışı ve öz benzerlik özelliklerine ilişkin doğrudan sonuçlar sağlamaktadır (Sato, 1999; Cont ve Tankov, 2004).

Çeşitli endekslerin günlük getirilerine ait özet istatistiklerinin yer aldığı Tablo 1’de çarpıklık ve basıklık gibi moment bazlı ölçümlerin finansal verilerde önemli farklar gösterdiği gözlemlenmektedir. Bu nedenle Brownian temelli hafif kuyruk modellerinin yetersiz kalabildiği vurgulanmaktadır. Bu ampirik gözlemler, Lévy süreçleri ve ağır kuyruklu modellerin neden tercih edildiğini desteklemektedir (Schoutens, 2003).

Tablo 1. Ana göstergelerle ilgili ortalama, standart sapma, çarpıklık ve basıklık

Gösterge	Ortalama	Standart sapma	Çarpıklık	Basıklık
S&P 500 (1970-2001)	0.0003	0.0099	-1.6663	43.36
S&P 500 (1997-1999)	0.0009	0.0119	-0.4409	6.94
Nasdaq-Composite	0.0015	0.0154	-0.5439	5.78
DAX	0.0012	0.0157	-0.4314	4.65
SMI	0.0009	0.0141	-0.3584	5.35
CAC-40	0.0013	0.0143	-0.2116	4.63

S&P 500, Nasdaq ve diğer endekslerin moment yapılarını gösteren Tablo1, finansal serilerin çoğunlukla ağır kuyruklu ve negatif çarpık olduklarını ortaya koymaktadır.

3. Filtrasyon ve Martingale Kavramı

Filtrasyon kavramı, zamanla bilgi düzeyinin artışı biçimsel olarak ifade etmektedir. Bir filtrasyon $\{F_t\}_{t \geq 0}$, her t için $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_t$ olmak üzere zamanla genişleyen artan bir sigma-alan dizisi olarak tanımlanmaktadır. Burada F_t , zaman t ’ye kadar gözlenebilen tüm olayları; F_0 , genellikle yalnızca belirli başlangıç bilgilerini içermektedir. Dolayısıyla filtrasyon, bir gözlemcinin zamana bağlı olarak hangi bilgileri bildiğini ve hangi olayların o ana kadar gözlemlenmiş sayılacağını göstermektedir. Böylece zaman ilerledikçe bilginin arttığı, azalmadığı varsayılır. Filtrasyonun sağladığı bu bilgi düzeni, stokastik süreçlerin geleceğinin geçmiş bilgiye nasıl bağlı olduğunun anlaşılmasına olanak tanımaktadır. Bu nedenle filtrasyon, stokastik kontrol, optimal durdurma ve finansal fiyatlama teorilerinin

tümünde zorunlu bir bileşen olmuştur (Øksendal ve Sulem, 2005; Karatzas ve Shreve, 1998).

Sürekli zamanlı stokastik süreçlerin matematiksel olarak incelenebilmesi için yalnızca olasılık uzayının tanımlanması yeterli değildir, aynı zamanda zaman içinde bilginin nasıl geliştiğinin de açık biçimde modellenmesi gerekmektedir. Bu amaçla filtrasyon, bilgi akışının zaman içerisinde genişlemesini temsil eden temel bir yapıyı oluşturmaktadır. Stokastik analizde, özellikle Itô integrali, stokastik diferansiyel denklemler ve martingale kuramı gibi alanlarda filtrasyon kavramı önemli bir rol oynamaktadır (Protter, 2005; Klebaner, 2001).

3.1. Uyarlanmış, Ölçülebilir ve Öngörülebilir Süreçler

Stokastik süreçlerin filtrasyonla ilişkisini ifade eden üç temel kavram bulunmaktadır.

Uyarlanmış (Adapted) süreç: Bir süreç $X = \{X_t\}$, eğer her X_t rastgele değişkeni t zamanında ortaya çıkıyor ve X_t stokastik değişkeni F_t tarafından ölçülebilir ise sürecin bilgiye *uyarlanmış* olduğu söylenmektedir. Adapted olarak adlandırılan bu süreçte, yatırımcının t anında sürecin değerini bilmesinin mümkün olduğunu ifade edilmektedir.

Ölçülebilir (Measurable) süreç: Ölçülebilirlik, sürecin belirli standartlara göre değerlendirilmesini sağlar ve özellikle integrallerin tanımlanmasında gereklidir.

Öngörülebilir (Predictable) süreç: Bir süreç öngörülebilir ise t anındaki değeri önceki bilgiyi (F_{t-}) ölçülebilir; yani değer, tam t anından hemen önceki bilgiye göre belirlenebilir.

Öngörülebilir süreçler, Itô integralinin tanımında temel bir rol oynamaktadır. Özellikle volatilité ve işlem stratejileri gibi finans modellerinde kullanılan kontrol fonksiyonları genellikle öngörülebilir kabul edilmektedir (Protter, 2005).

3.2. Martingale, Süpermartingale ve Submartingale

Stokastik süreçlerin önemli bir bölümü, filtrasyon yapısı altında martingale özellikleri açısından analiz edilir. Bir süreç (X_t) ;

$$E[X_t | F_s] = X_s, \quad s < t$$

eşitliğini sağlıyorsa martingale olarak tanımlanmaktadır.

Martingale “adil oyun” fikrini temsil ettiğinden finansal modellemede aşırı önemlidir. Çünkü finansal bağlamda: bir varlık fiyatı risk-nötr ölçü altında martingaldir. Bu durum, arbitraj yokluğu ve adil fiyatlama prensiplerinin matematiksel karşılığını oluşturmaktadır (Hull, 2001; Karatzas ve Shreve, 1998).

Eğer;

$$E[X_t | F_s] \leq X_s$$

ise süreç bir süpermartingaldir. Bu durum, finansal açıdan, sistematik şekilde değer kaybeden bir fiyat sürecini temsil etmektedir.

Eğer;

$$E[X_t | F_s] \geq X_s$$

ise süreç bir submartingaldir. Bu durum, beklenen değer zamanla arttığını göstermektedir.

3.3. Martingale’lerin Finansal Modelleme Açısından Önemi

Finans literatüründe martingale kavramı “adil fiyatlama” ile ilişkilidir. Risk-nötr ölçü altındaki varlık fiyat süreci bir martingale olmalıdır; bu durum arbitraj fırsatlarının ortadan kalkmasını sağlamaktadır (Hull, 2001).

Lévy süreçlerinin önemli bir özelliği, belirli dönüştürmeler altında martingale yapısı kazanabilmeleridir. Her Lévy süreci için üstel dönüşümler, telafi edilmiş terimleri, sıçrama bileşenlerinin düzenlenmesi gibi yöntemlerle martingale oluşturulabilmektedir (Sato, 1999; Cont ve Tankov, 2004).

Martingaller; risk-nötr değerlendirme, teminat süreçleri, opsiyon fiyatlama ve optimal portföy seçimi gibi konularda temel araçlardır. Modern finans matematiğinin büyük bölümü martingale kuramı etrafında şekillendiği için

(Øksendal ve Sulem, 2005; Applebaum, 2004) martingale, finansal modelleme açısından oldukça değerlidir. Türevlere ilişkin fiyatlama formülleri, Esscher dönüşümü, risk-nötr ölçü seçimi, ileri-geri fiyat süreçlerinin modellenmesi gibi uygulamalarda Lévy süreçlerinden türetilen martingaller yaygın biçimde kullanılmaktadır (Schoutens, 2003). Böylece filtrasyon, martingale yapıları ve Lévy süreçlerinin yapısal özellikleri arasında sıkı bir ilişki bulunmaktadır.

4. Temel Stokastik Süreçler

Stokastik süreçler kuramında belirli özel süreç sınıfları, hem teorik açıdan hem de uygulamalı modelleme bakımından merkezi bir konuma sahiptir. Bu süreçler; bağımsız ve durağan artışlara sahip olmaları, yörünge özelliklerinin iyi tanımlanmış olması ve analitik hesaplamalara imkân tanımları nedeniyle finans, sigortacılık, ekonometrik modelleme, mühendislik ve fizik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu bölümde, stokastik süreç kuramının temelini oluşturan Poisson süreci, Brownian hareketi (Wiener süreci) ve telafi edilmiş Poisson süreci gibi önemli süreçler ele alınacak; ayrıca bu süreçlerin örnek yörüngeleri, moment yapıları ve temel özellikleri ayrıntılı biçimde açıklanacaktır.

Bu süreçlerin ortak özelliği, Lévy süreçleri için temel yapı taşları oluşturmalarıdır. Zira her Lévy süreci, Brownian bileşeni, deterministik sürüklenme terimi ve çeşitli sıçrama bileşenlerinden oluşmaktadır (Sato, 1999). Bu nedenle Poisson süreci ve Brownian hareketi, Lévy süreçlerinin en temel spesifik örnekleri olarak modern stokastik modellemenin merkezinde yer almaktadır (Applebaum, 2004; Cont ve Tankov, 2004).

4.1. Poisson Süreci

Poisson süreci, sıçramalı stokastik süreçlerin en temel örneklerinden biri olup bağımsız ve durağan artışlara sahip olması nedeniyle hem teorik hem de uygulamalı modellemenin merkezinde yer almaktadır. Finansal matematikten kuyruk teorisine, sigortacılıktan telekomünikasyon sistemlerine kadar geniş bir alanda, zaman içinde gerçekleşen rastgele olayların sayısını modellemek için kullanılmaktadır (Kingman, 1993; Schoutens, 2003).

Bir Poisson süreci ($N_t: t \geq 0$) aşağıdaki temel özellikleri sağlayan bir stokastik süreçtir.

✓ *Başlangıç koşulu:* $N_0 = 0$

✓ *Bağımsız artışlar:* Süreçteki olayların geçmiş hareketlerden etkilenmediğini göstermektedir. Bu özellik finansal modellemede özellikle yeniden başlama benzeri davranışları modellemek için önemlidir. Ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen artışlar birbirinden bağımsızdır.

(N_t) bağımsız artışlara sahiptir. Yani, her $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ bağımsız rastgele değişkenlerdir.

✓ *Durağan artışlar:* Homojen süreçlerde artışın dağılımı yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır. Bu özellik, Lévy süreçlerinin temel özelliklerinden biridir ve sürecin zaman homojenliğini temsil etmektedir (Sato, 1999).

N artışları durağandır. Yani, her $s < t$ için $N_t - N_s, N_{t-s}$ ile eşit dağılıma sahiptir.

✓ *Càdlàg örnek yörüngeler:* Poisson sürecinin örnek yörüngeleri; sağdan sürekli, soldan limitli, monoton artan ve her sıçraması 1 birimlik olan bir yapı sergilemektedir. Bu, sıçramalı finansal modellerde ani haber etkilerini, iflasları veya fiyat sıçramalarını temsil etmek için doğru bir yapıdır (Bertoin, 1996).

$t \rightarrow N_t(\omega)$, sağdan sürekli, solda limitli örnek fonksiyonlara sahiptir.

✓ *Sıçrama yapısı:* Poisson süreci yalnızca bir birimlik sıçrama yapmaktadır. Poisson süreci saf sıçrama süreci olduğundan sıçramaların büyüklüğü modellenmez, yalnızca sayısı modellenmektedir. Sıçrama büyüklükleri de modele dahil edilmek istenirse süreç bileşik Poisson sürecine genişletilir.

Her sıçrama bir birimdir ve $t > 0$ için $N_t - N_{t-} = 1$.

4.1.1. Homojen Poisson Süreci

Homojen Poisson sürecinde olayların gerçekleşme hızı zaman boyunca sabit bir parametre olan $\lambda > 0$ ile ifade edilmektedir. Bu durumda süreç, her zaman aralığında ortalama $\lambda(t - s)$ kadar olay gerçekleşeceğini varsaymaktadır. Sabit yoğunluk varsayımı, matematiksel açıdan güçlü bir

yapı sağlar ancak gerçek hayat uygulamalarında sınırlı kalabilir (Sato, 1999). Olay yoğunluk parametresi Poisson sürecinin en önemli bileşenidir.

Homojen süreçte *artışlar*; $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$ olmaktadır. Bu süreç finansal piyasalarda işlem sayıları, sigortacılıkta hasar sayıları veya sistemlere giriş yapan müşteri sayılarının zamanla modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır (Kingman, 1993).

Bu süreçte; λ , birim zamanda beklenen olay sayısını gösterirken *moment yapısı*;

$$E(N_t) = \lambda t$$

$$\text{Var}(N_t) = \lambda t$$

şeklinde. Bu eşitlikler, artışların hem beklenen değer hem de varyans bakımından doğrusal yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

4.1.2. Heterojen Poisson Süreci

Gerçek sistemlerde olay yoğunluğu zaman içinde sabit olmayabilir. Örneğin: finansal piyasalarda işlem yoğunluğu sabah ve akşam saatlerinde daha fazladır, hastanelerde başvuru sayısı günün belirli saatlerinde artabilir, trafik akışı gün içinde periyodik değişiklikler gösterebilir. Bu durumlar heterojen Poisson süreci ile modellenebilir.

Bu süreçte, λt , t anındaki olay gerçekleşme hızını (yoğunluk fonksiyonu) göstermekte ve *beklenen olay sayısını* ise;

$$E(N_t) = \Lambda_t = \int_0^t \lambda(s) ds$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu durumda *artışlar*;

$$E(N_t - N_s) = \int_s^t \lambda(u) du$$

olarak tanımlanmaktadır. Homojen olmayan Poisson süreçleri, yoğunluk fonksiyonu λ_t 'nin zamanla değişmesi, gerçekçi fiyatlama modellerinde özellikle sıçrama yoğunluğunun gün içi değişimlerini modellemekte kullanılmaktadır (Cont ve Tankov, 2004). Bu özellik, sürecin hem ortalama hem varyans açısından doğrusal büyüme gösterdiğini ortaya koymaktadır (Sato, 1999).

4.1.3. Telafi Edilmiş Poisson Süreci

Poisson sürecinin merkezileştirilmiş versiyonunu, $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu süreç, beklenen değeri sıfıra indirgenmiş bir Poisson süreci olup bir martingale oluşturmaktadır (Protter, 2005; Klebaner, 2001). Sıçramalı finansal modellerde bu yapı, sıçrama bileşenlerini risk-nötr önlemler altında martingale hâline getirmek için kullandığından özellik finansal matematikte kritik öneme sahiptir.

Poisson süreci gibi, $\tilde{N}_t$ bağımsız artışlara sahip ve;

$$E[N_t | N_s, s \leq t] = E[N_t - N_s + N_s | N_s]$$

$$E[N_t - N_s] + N_s = \lambda(t - s) + N_s$$

eşitliği geçerlidir. Bundan dolayı ($\tilde{N}_t$) bir Martingale'dir. Yani;

$$\forall t > s, \quad E[\tilde{N}_t | \tilde{N}_s] = \tilde{N}_s$$

olur. Burada $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$, telafi (kompanse) edilmiş Poisson süreci olarak adlandırılmakta ve $(\lambda t)_{t \geq 0}$, telafi edici olarak bilinmektedir. Telafi edici, telafi edilmiş Poisson süreci oluşturmak için çıkarılması gereken bir değeri temsil etmektedir. Telafi edilmiş Poisson süreci kesin bir değer taşımaz ve bu nedenle, Poisson sürecinden farklı olarak bir sayma süreci oluşturmamaktadır.

Bu özellik, genel Lévy süreçlerinin oluşturulmasında kilit bir rol oynamaktadır (Sato, 1999; Applebaum, 2004).

4.2. Brownian Hareketi

Brownian hareketi, stokastik süreç teorisinin en temel yapı taşlarından biri olup finansal modellemede rastgele fiyat hareketlerinin sürekli zamanlı temsil edilmesi açısından önemlidir. Fiziksel bir süreç olarak ilk kez Brown (1828) tarafından polen tanelerinin düzensiz hareketi bağlamında gözlemlenmiş, matematiksel olarak ise Wiener tarafından biçimlendirilmiş ve literatürde Wiener süreci olarak tanımlanmıştır. Modern stokastik analizde Brownian hareketi, sürekli yollu bir Lévy süreci olarak kabul edilmektedir (Sato, 1999; Applebaum, 2004).

Olasılık uzayında $X = \{X_t, t \geq 0\}$ stokastik bir süreç ise ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa standart Brownian hareketi ($W = \{W_t, t \geq 0\}$) olarak

tanımlanmaktadır. Standart Brownian hareketi W_t , sıfır ortalama ve varyansı zamanla doğrusal olarak artan bir süreçtir.

$$E[W_t] = 0$$

$$Var(W_t) = t$$

Bu tanım, sürecin hem ortalamasının hem de varyansının analitik modellerde kullanılmasını kolaylaştırmaktadır. Özellikle Black–Scholes modelindeki temel stokastik diferansiyel eşitlik (SDE), Brownian hareketinin bu özelliklerine dayanmaktadır.

✓ *Başlangıç koşulu:* Hemen hemen her yerde $X_0 = 0$ 'dır.

✓ *Artışların bağımsızlığı:* Bu hareketin en ayırt edici özelliği artışların bağımsız ve normal dağılmış olmasıdır. Yani, $X_{t+s} - X_t$, rastgele değişkenler için ortalama değeri 0 ve varyansı $s > 0$ olan bir normal dağılıma sahiptir. Bu durum $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$ olarak gösterilebilmektedir.

Artışların bağımsız olma özelliği, Brownian hareketinin Markov olduğunu ifade etmektedir. Gelecekteki fiyat hareketlerinin geçmişten bağımsız kabul edilmesi, analitik çözümlü stokastik diferansiyel denklemlerin yazılabilmesi, fiyat süreçleri için risk-nötr ölçü altında martingale özellikleri sağlanabilmesi gibi özelliklerden dolayı finansal modellemede önemlidir (Øksendal ve Sulem, 2005; Applebaum, 2004).

✓ *Artışların sürekliliği:* Brownian hareketi sürekli yörüngelere sahiptir. Böylece sıçrama içermemekte ve W_t , t 'ye bağlı sürekli bir fonksiyonu göstermektedir.

Brownian hareketinin yörüngeleri son derece düzensiz ve öngörülemez bir yapıya sahiptirler. Bu süreç türevlenebilir değil ve yörüngeleri her zaman aralığında sonsuz sayıda salınım içermektedir. Böylece;

$$P\left(\sup_{t \geq 0} W_t = +\infty \quad \text{ve} \quad \inf_{t \geq 0} W_t = -\infty\right) = 1$$

bu eşitlik Brownian hareketinin dalgalanmalarının tüm pozitif ve negatif değerlerde sonsuz olduğunu göstermektedir. Bu hareket, sürekli zamanlı rastgele fluktuasyonları temsil ettiği için finansal piyasalarda log-getirilerin stokastik bileşenini modellemekte yaygın olarak kullanılmaktadır (Schoutens, 2003).

✓ *Artışların normal dağılımı:* Brownian hareketi, artışlarının normal dağılımlı olmasıyla karakterize edilmektedir.

$$W_{t+s} - W_s \sim N(0, t - s)$$

Bu özellik, sürecin Gaussyen bir süreç olduğunu göstermekte ve artışların normal dağılması sayesinde analitik olarak çözülebilir stokastik diferansiyel denklemler, kapalı form opsiyon fiyatlama modelleri, Merkezi Limit Teoremi ile uyumlu istatistiksel yapılara erişim gibi önemli avantajları sağlamaktadır. Bu nedenle Brownian hareketi, modern finansın en ünlü modeli olan Black–Scholes modelinin matematiksel temelini oluşturmaktadır (Schoutens, 2003).

Brownian hareketinin kovaryans fonksiyonu ise $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$ olarak verilmekte ve bu kovaryans yapı, sürecin zaman içinde birikimsel rastgele hareketler sergilediğini göstermektedir.

✓ *Martingale özelliği:* Brownian hareketi doğal filtrasyonu altında bir martingale sürçtür. Yani her $0 \leq s \leq t$ için;

$$E[W_t | F_s] = E[W_t | W_s] = W_s$$

ve ayrıca;

$$E[W_t W_s] = \min\{t, s\}$$

olur.

Bu özellik; risk-nötr fiyatlama teorisinin temelini oluşturmakta, Itô integrali ve Itô formülünün inşasında kritik bir rol oynamakta (Øksendal ve Sulem, 2005) ve genel Lévy süreçlerinin sınıflandırılmasında önemli bir referans nokta oluşturmaktadır.

✓ *Kendine benzerlik özelliği:* Brownian hareketinin bir diğer önemi özelliğidir. $W = \{W_t, t \geq 0\}$ Brownian hareketi ise, her $c \neq 0$ için;

$$\tilde{W} = \{\tilde{W}_t = cW_{t/c^2}, \quad t \geq 0\}$$

aynı zamanda bir Brownian hareketidir (Schoutens, 2003).

Bu özellikleri nedeniyle Brownian hareketi, hem teorik hem de uygulamalı finans alanlarında temel bir rol üstlenmektedir.

Brownian hareketi, sıçramasız bir Lévy süreci olarak kabul edilmektedir. Bu durum; drift olmadığını, varyans parametresinin 1 ve Lévy ölçüsünün sıfır (sıçrama yok) olduğunu göstermektedir. Lévy üçlüsü açısından ise $(\gamma, A, \nu) = (0, 1, 0)$ olarak ifade edilmekte ve bu nedenle Brownian hareketi, daha karmaşık Lévy modellerinin özel bir hâli olarak değerlendirilmektedir (Applebaum, 2004; Sato, 1999).

4.3. Poisson ve Brownian Süreçlerinin Karşılaştırılması

Poisson süreci ve Brownian hareketi, stokastik süreç teorisinin iki temel yapı taşı olarak birbirinden önemli farklılıklar göstermekte olup modern finansal modelleme, kuyruk teorisi ve stokastik analizde ayrı roller üstlenmektedirler (Bertoin, 1996; Kallenberg, 2002). Bu iki süreç arasındaki karşılaştırma, hem sürekli hem de kesikli stokastik dinamikleri anlamak açısından kritik bir öneme sahiptir. Ayrıca Lévy süreçlerinin yapısal bileşenleri incelenirken Poisson sıçrama yapısı ve Brownian'ın sürekli bileşeni arasındaki ayrım doğrudan Lévy–Khintchine temsiline yansımaktadır (Bertoin, 1996; Sato, 1999).

4.3.1. Süreç Türü Bakımından Karşılaştırılması

Poisson süreci yalnızca bir birimlik sıçramalar üreten ve yörüngeleri sağdan sürekli, soldan limitli (càdlàg) bir yapıya sahip olan bir süreçtir. Bu nedenle fiyatlar veya olay sayıları gibi niceliklerde meydana gelen ani ve belirgin değişimleri temsil etmeye uygundur. Gerçek piyasalarda gözlenen ani haber etkileri, iflaslar ya da büyük hacimli emir akışları, bu tür sıçrama yapısına sahip süreçlerle daha gerçekçi biçimde modellenabilmektedir (Cont ve Tankov, 2004).

Buna karşılık Brownian hareketi, örnek yörüngelerinin neredeyse kesinlikle sürekli olmasıyla karakterize edilir; süreç zaman içerisinde ani sıçramalar içermez ve değişim küçük ve sürekli dalgalanmalar şeklinde gerçekleşir (Øksendal ve Sulem, 2005). Bu özellikleri nedeniyle finansal piyasa modellerinin klasik yaklaşımında fiyatların sürekli bir evrim izlediği varsayımı temsil etmektedir. Black–Scholes modeli de tamamen bu sürekli hareket varsayımı üzerine inşa edilmiştir.

Poisson süreci (Sıçramalı); $N_t - N_{t-} = 1$

Brownian hareketi (Sürekli); $P(W_t \text{ sürekli}) = 1$

4.3.2. Artışların Dağılımı Bakımından Karşılaştırılması

Poisson süreçlerinde artışlar pozitif tam sayı değerleri almakta ve sıçrama sayılarını temsil etmektedir. Bu artışların dağılımı sağa çarpık olup kalın kuyruklar üretmektedir. Dolayısıyla Poisson süreçleri, normal dağılımın açıklamakta yetersiz kaldığı asimetrik ve sıçramalı yapıları modellemede daha esnektir ve artışlar Poisson dağılımı ile temsil edilmektedir.

Brownian harekette ise artışlar normal dağılır; bu özellik Gaussyen süreç teorisinin uygulanmasına, analitik çözümlerin elde edilmesine ve fiyatların log-normal dağılım varsayımına olanak tanımaktadır (Schoutens, 2003). Brownian artışları özellikle küçük zaman aralıklarında simetrik ve hafif kuyruklu dağılımlar üretmekte ve normal dağılım ile modellenmektedir.

Poisson artışlarının dağılımı (Poisson); $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$

Brownian artışlarının dağılımı (Normal); $W_{t+s} - W_s \sim N(0, t - s)$

4.3.3. Artış Yapısı Bakımından Karşılaştırılması

Her iki süreç de bağımsız ve durağan artışlara sahip olmakla birlikte, bu artışların niteliği birbirinden önemli ölçüde farklıdır. Poisson sürecinde artışlar ayırık yapı sergiler ve yalnızca bir birimlik sıçramalar üreterek Poisson dağılımına uymaktadır. Buna karşılık Brownian hareketi sıçrama içermeyen, sürekli ve normal dağılıma sahip artışlar üretmektedir. Bu çerçevede Poisson süreci ile Brownian hareketi, Lévy süreçleri ailesinin iki uç bileşeni olarak değerlendirilebilir. Bir Lévy sürecinin artışları, Brownian hareketinin sürekli difüzyon bileşeni ile Poisson türü sıçrama bileşeninin birleşiminden oluşmaktadır (Applebaum, 2004).

4.3.4. Varyans ve Oynaklık Yapısı Bakımından Karşılaştırılması

Poisson sürecinde varyans, sıçrama yoğunluğu λ ile doğru orantılıdır; dolayısıyla oynaklık, sıçramaların gerçekleşme sıklığına bağlı olup sıçramalar seyrek fakat belirgin etkilere sahiptir. Buna karşılık Brownian hareketinde varyans zamanla doğrusal olarak artar ve bu yapı, sürekli bir oynaklık bileşeninin ortaya çıkmasına neden olur.

Poisson süreci için varyans; $Var(N_t) = \lambda t$

Brownian hareketi için varyans; $Var(W_t) = t$

4.3.5. Martingale Yapısı Bakımından Karşılaştırılması

Her iki süreç de uygun telafi işlemleri altında martingale özelliği kazanabilir. Telafi edilmiş Poisson süreci $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$ bir martingaledir (Protter, 2005), Brownian hareketi ise doğal filtrasyonu altında zaten bir martingale yapısına sahiptir. Bu özellikler, risk-nötr fiyatlama teorisinin ve stokastik integral kuramının temel bileşenlerini oluşturmaktadır.

4.3.6. Finansal Modelleme Bakımından Karşılaştırılması

Poisson süreci ve Brownian hareketi finansal modelleme bağlamında farklı dinamikleri temsil etmektedir. Brownian hareketine dayalı modeller, Black–Scholes tipi sürekli yapıdaki piyasa modellerine karşılık gelmekte ve fiyatların küçük fakat sürekli dalgalanmalarla evirildiği varsayımını temel almaktadır. Bu süreç hafif kuyruklu dağılımlar üretmekte ve özellikle faiz oranı modelleri ile volatilité dinamiklerinin tanımlanmasında yaygın şekilde kullanılmaktadır.

Poisson süreci ise sıçramalı-difüzyon modellerinin ayrılmaz bir bileşenidir ve nadir fakat büyük fiyat sıçramalarını temsil etmektedir. Bu yapı kalın kuyruklu dağılımlar üreterek ani bilgi akışları, beklenmedik olaylar veya kredi temerrütleri gibi keskin değişimlerin modellenmesinde daha gerçekçi sonuçlar sağlamaktadır. Bu nedenle opsiyon fiyatlamada sıçrama etkileri, kredi riski analizi ve olay sayımı gibi uygulamalarda sıklıkla tercih edilmektedir.

Günümüz finansal piyasalarının hem sürekli dalgalanmalar hem de ani sıçramalar içerdiği göz önünde bulundurulduğunda, Brownian hareketi ile Poisson sürecinin özelliklerini bir araya getiren Lévy süreçlerinin modern finansal modellemede kritik bir rol üstlendiği açıktır (Cont ve Tankov, 2004; Schoutens, 2003).

Brownian hareketi süreklilik yapısı, Poisson süreci ise sıçrama niteliği nedeniyle Lévy süreçlerinin iki temel bileşenini oluşturur. Lévy–Khintchine temsili, herhangi bir Lévy sürecinin bir Brownian bileşeni (sürekli difüzyon) ile Poisson tipi bir sıçrama bileşeninin birleşiminden meydana geldiğini

açıkça ortaya koymaktadır (Sato, 1999). Bu nedenle Brownian hareketi ve Poisson süreci arasındaki karşılaştırma, Lévy süreçlerinin genel yapısını anlamak için doğal ve gerekli bir zemin sunmaktadır (Bertoin, 1996).

5. Lévy Süreci ve Özellikleri

Lévy süreçleri, adını Fransız matematikçi Paul Lévy'den alan, bağımsız ve durağan artış özelliklerine sahip sürekli zamanlı stokastik süreçlerdir. Bu süreçler, sürekli zamanlı stokastik modellerin kurulmasına olanak sağlayan güçlü bir matematiksel çerçeve sunmaları nedeniyle hem teorik hem de uygulamalı olasılık kuramında merkezi bir konuma sahiptir. Son yıllarda özellikle finans matematiğinde sıçramalı modellerin önem kazanması, yüksek frekanslı veri analizleri ve ağır kuyruk yapılarının modellenmesi gibi nedenlerle Lévy süreçlerine olan ilgi daha da artmıştır.

Lévy süreçleri, Brownian hareketi gibi tamamen sürekli süreçleri ve Poisson süreci gibi saf sıçramalı süreçleri tek bir ortak yapıda birleştiren geniş bir sınıfı temsil etmektedir. Böylece hem klasik difüzyon modellerini hem de sıçramalı stokastik süreçleri kapsayan genel ve esnek bir yapı sunmaktadırlar (Sato, 1999; Applebaum, 2004; Schoutens, 2003). Rastgele zamanlarda gerçekleşen sıçramalar ile sürekli difüzyon bileşeninin aynı süreç içinde yer alabilmesi, Lévy süreçlerini özellikle finans, sigorta matematiği, istatistiksel modelleme ve sinyal işleme gibi alanlarda vazgeçilmez bir araç hâline getirmektedir.

Bir Lévy süreci $\{X_t\}_{t \geq 0}$ aşağıdaki temel özellikleri sağlamalıdır.

- ✓ *Başlangıç koşulu:* $X_0 = 0$ koşullu neredeyse kesindir.
- ✓ *Bağımsız artışlar:* Ayrık zaman aralıklarında tanımlanan artışlar birbirinden bağımsızdır. Bu durum sürecin zamansal bağımsızlık yapısını ifade etmektedir.
- ✓ *Durağan artışlar:* Artışlar durağandır. Yani her $s < t$ için $X_t - X_s \sim X_{t-s}$ olur. Bu durumda, artışların dağılımı yalnızca zaman aralığının uzunluğuna bağlı olur.
- ✓ *Süreklilik:* Lévy süreçlerinin yörüngeleri sağdan sürekli ve solda limitlidir (càdlàg). Bu özellik, sıçrama noktalarının tanımlanabilir olmasını sağlamaktadır.

Bu temel özellikler, Lévy süreçlerinin hem kuramsal analiz hem de hesaplamalı yöntemler açısından son derece elverişli olmasına katkıda bulunmaktadır. Finansal piyasalarda gözlenen ani sıçramalar, çarpıklık, ağır kuyruk yapıları ve yüksek volatilité kümelenmesi gibi ampirik olguların modellenmesinde Lévy süreçleri geniş bir uygulama alanı bulmaktadır (Cont ve Tankov, 2004; Schoutens, 2003). Böylece Lévy süreçleri, gerçek dünya verilerinin süreksizlik ve karmaşıklık içeren yapısına uyum sağlayabilen modern stokastik modelleme yaklaşımlarının temelini oluşturur.

5.1. Lévy Sürecinin Tanımı

$(X_t)_{t \geq 0}$ süreci, bir olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış, càdlàg (sağdan sürekli, soldan limitli) örnek yollara sahip bir $\mathbb{R}^d$ değeri rastgele süreç olsun ve $X_0 = 0$ koşulunu sağlasın. Bu durumda söz konusu süreç, aşağıda belirtilen üç temel özelliği karşılama hâlinde bir Lévy süreci olarak tanımlanmaktadır.

✓ *Bağımsız artışlar*: Artan bir zaman dizisi $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ için $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ farkları bağımsız rastgele değişkenlerdir. Bu özellik, Lévy sürecinin gelecekteki artışlarının geçmiş yörüngelerinden bağımsız olduğunu göstermektedir. Bu durum, Lévy süreçlerini Markov süreçleri sınıfına dahil etmektedir.

✓ *Durağan artışlar*: Her zaman aralığının artışı, mutlak zaman noktasına (başlangıç zamanına) bağlı değil, sadece aralığın uzunluğuna bağlıdır. Başka bir ifadeyle $X_{t+h} - X_t$, farkının dağılımı, yalnızca h 'ye bağlı ve t 'den bağımsızdır. Bu durum sürecin zaman homojenliğini ifade etmektedir.

✓ *Olasılıkta süreklilik*: Herhangi bir $t > 0$ için $\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$ koşulu sağlanmaktadır. Bu koşul sıçrama olasılığının her an sıfır olduğunu değil, küçük zaman aralıklarında büyük sıçramalar gerçekleşme olasılığının küçük olduğunu göstermektedir.

Bu koşul, sürecin büyük sıçramaları küçük zaman aralıklarında düşük olasılıkla gerçekleştirdiğini ifade etmektedir. Ancak bu durum süreçte sıçrama bulunmadığı göstermemektedir. Olasılıkta süreklilik, örnek yolunun sürekliliğini garanti etmediği için Lévy süreçleri yine de sıçrama içerebilir (Sato, 1999; Applebaum, 2004). Böylece Lévy süreçleri hem analitik olarak

kolay yönetilebilir özellikler taşımakta hem de sıçramalı veya sürekli dinamiklerin birlikte modellenmesine imkân tanıyarak uygulama açısından yüksek esneklik sunmaktadır. Brownian hareketi (sürekli difüzyon yapısı) ve Poisson süreci (ayrık sıçramalar) Lévy süreçlerinin bu temel özelliklerini somut olarak karşılayan iki klasik örnektir.

Lévy süreçlerinin modern stokastik analizdeki bu standart tanımı, Sato (1999) ve Applebaum (2004) tarafından kapsamlı biçimde ele alınmış ve literatürde yaygın kabul gören çerçeveyi oluşturmuştur.

5.2. Sonsuz Bölünebilirlik

Sürekli zamanlı stokastik süreçlerin analizi, örnek yolların yapısal özelliklerinin incelenmesiyle başlamaktadır. Bir fonksiyonun değişim davranışı, süreçlerin süreksizlik, sıçrama ve düzensizlik seviyelerini belirlemek açısından temel bir ölçüttür.

Bir fonksiyonun $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığındaki bir bölüntü $p = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b\}$ üzerindeki toplam değişimi;

$$Var_p(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Tüm bölüntüler üzerindeki üst sınır $\sup_p Var_p(f)$ sonlu ise fonksiyonun ilgili aralıkta sonlu değişime sahip olduğu; aksi takdirde fonksiyon sonsuz değişime sahip olduğu söylenir.

Gerçel doğrusal eksende tanımlı bir fonksiyonun her kompakt aralıkta sonlu değişime sahip olması, genel anlamda sonlu değişim niteliğini ifade etmektedir. Her azalmayan fonksiyonun sonlu değişimli olması bilinen bir sonuçtur; ayrıca sonlu değişimli her fonksiyon iki azalmayan fonksiyonun farkı biçiminde temsil edilebilir.

Bu kavram, sürekli zamanlı stokastik süreçlerin sınıflandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Örnek yolları neredeyse kesinlikle sonlu değişim gösteriyorsa süreç sonlu değişim süreci olarak adlandırılmaktadır; aksi hâlde süreç sonsuz değişime sahiptir. Poisson süreci, sıçrama temelli yapısı nedeniyle sonlu değişim süreçlerinin tipik bir örneğiyken; Brownian hareketinin örnek yolları neredeyse kesinlikle sonsuz toplam varyasyona sahiptir. Dolayısıyla süreç klasik anlamda sonlu değişime sahip değildir.

Ancak p –varyasyon açısından incelendiğinde, Brownian hareketinin $p > 2$ için sonlu p –varyasyona, $p \leq 2$ için sonsuz p -varyasyona sahip olduğu bilinmektedir (Fristedt ve Gray, 1997).

Süreçlerin bu yapısal ayrımı, Lévy süreçlerinin genel teorisinin anlaşılması için temel oluşturmaktadır. Çünkü Lévy süreçleri, bir yandan sıçrama davranışını, diğer yandan sürekli difüzyon bileşenlerini aynı çatı altında birleştiren süreçlerdir.

5.2.1. Sonsuz Bölünebilir Dağılımlar

Bir olasılık dağılımı F , $\mathbb{R}^d$ uzayı üzerinde tanımlıyken; eğer her $n \geq 2$ tam sayısı için $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve özdeş dağılıma sahip rastgele değişkenler bulunabiliyor ve bu değişkenlerin toplamı;

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

dağılım olarak F 'yi veriyorsa, o hâlde F sonsuz bölünebilir (infinitely divisible) bir dağılımdır (Kallenberg, 2002).

Bu tanım, F 'nin her zaman bir konvolüsyon kökü bulunduğunu ifade etmekte, başka bir ifadeyle, F dağılımı;

$$F = \mu * \mu * \dots * \mu$$

(n kez konvolüsyon) olacak şekilde bir μ dağılımı mevcuttur. Toplamların limit teoremleri, rastgele yürüyüşlerin süreklileştirilmesi ve Lévy süreçlerinin temelinde sonsuz bölünebilir dağılımlar yer almaktadır (Kallenberg, 2002; Sato, 1999).

Sonsuz bölünebilir dağılımların önemli örnekleri arasında Gauss dağılımı, gama dağılımı, Poisson dağılımı ve α -kararlı dağılımlar yer almaktadır. Bu dağılımlar, i.i.d. rastgele değişkenlerin toplamı şeklinde ayrıştırılabildikleri için süreçlerin artış dağılımları için uygundur.

5.2.2. Lévy Süreçleri ve Sonsuz Bölünebilirlik

Lévy süreçleri, bağımsız ve durağan artışlara sahip olmaları nedeniyle, her sabit $t > 0$ için X_t rastgele değişkeni dağılımının sonsuz bölünebilir olmasını gerektirmektedir.

$(X_t)_{t \geq 0}$ bir Lévy süreci ise, her t için X_t dağılımı sonsuz bölünebilirdir. Akis durum, eğer F sonsuz bölünebilir bir dağılım ise, o zaman öyle bir Lévy süreci vardır ki, bu sürecin X_t artışı dağılım olarak F ile verilmiştir.

Bu sonuç, Lévy süreçlerinin artış dağılımlarının rasgele seçilemeyeceğini, yalnızca sonsuz bölünebilir dağılımlar arasından seçilebileceğini göstermektedir. Dolayısıyla ayrık zamanlı rastgele yürüyüşlerin aksine, herhangi bir dağılım sürekli zamana doğrudan taşınamaz; Lévy süreçleri yalnızca belirli yapıdaki dağılımlara izin vermektedir.

5.3. Lévy Ölçüsü ve Özellikleri

Bir Lévy sürecinin sıçrama davranışını tanımlamada temel rol oynayan kavramlardan biri Lévy ölçüsüdür. Bu ölçü, sürecin farklı büyüklüklerdeki sıçramaları hangi sıklıkta gerçekleştirdiğini belirleyen matematiksel bir yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla Lévy ölçüsü, hem sıçrama büyüklüklerinin dağılımını hem de sıçramaların zaman içerisindeki yoğunluğunu temsil eden yapısal bir bileşendir (Sato, 1999; Applebaum, 2004; Kallenberg, 2002).

Eğer $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı bir Lévy süreci ise, Lévy ölçüsü (ν);

$$\nu(A) = E[\# \{t \in [0,1]: \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}]$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada A , $\mathbb{R}^d$ üzerinde Borel σ -cebirine ait bir kümeyi ve $\nu(A)$, birim zaman aralığında gerçekleşen sıçramaların A kümesine düşme olasılığının beklenen sayısını göstermektedir. Başka bir ifadeyle, Lévy ölçüsü belirli bir sıçrama büyüklüğü aralığındaki sıçramaların ortalama yoğunluğunu nicel olarak belirlemektedir.

Lévy ölçüsünün, bir Lévy sürecinin geçerliliğini ve iyi tanımlanmış olmasını güvence altına alan bazı temel özellikleri bulunmaktadır.

✓ *Sonsuz küçük sıçramaların yoğunluğu sınırsız olabilir:* Süreç çok sayıda küçük sıçrama gerçekleştirebildiğinden Lévy ölçüsü küçük x değerleri çevresinde sonsuz yoğunluğa sahip olabilir (Bertoin, 1996).

✓ *Büyük sıçramaların toplam sayısı sonludur:* Büyük sıçramalar zaman içinde çok seyrek gerçekleştiğinden Lévy sürecinin örnek yörüngelerinde büyük sıçramaların birim zamanda sonlu sayıda olmasını sağlamaktadır (Bertoin, 1996).

✓ *Lévy ölçüsü aşağıdaki bütünleşme koşulunu sağlamalı:* Bu, küçük sıçramaların toplam katkısının kontrol altında tutulmasını sağlamak ve

sürecin iyi tanımlanmış bir stokastik yapıya sahip olmasının temel koşulunu oluşturmaktadır.

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$$

Bu özellikler, Lévy ölçüsünü Lévy–Khintchine temsilinin ayrılmaz bir bileşeni hâline getirmekte ve genel Lévy süreçlerinin sıçrama davranışını ayrıntılı biçimde karakterize etmektedir.

5.3.1. Karakteristik Fonksiyon ve Üstel Karakteristik

Bir Lévy sürecinin karakteristik fonksiyonu;

$$\Phi_t(z) \equiv \Phi_{X_t}(z) \equiv E[e^{izX_t}], \quad z \in \mathbb{R}^d$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Artışların bağımsız ve durağan olması nedeniyle;

$$X_{t+s} = X_s + (X_{t+s} - X_s)$$

olarak yazılabilir ve iki terim bağımsız olduğundan çarpılabilirlik özelliği sağlanır. Böylece;

$$\begin{aligned} \Phi_{t+s}(z) &= \Phi_{X_{t+s}}(z) = \Phi_{X_t}(z) \Phi_{X_{t+s}-X_t}(z) \\ &= \Phi_{X_s}(z) \Phi_{X_t}(z) = \Phi_s \Phi_{X_t} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Olasılıkta süreklilik koşulu ile birlikte bu çarpma özelliği, $t \rightarrow \Phi_t(z)$ fonksiyonunun üstel bir yapı taşıdığını göstermektedir. Bu bağlamda, Lévy süreçlerinin temel karakterizasyonu;

$$E[e^{izX_t}] = e^{it \cdot \psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\psi(z)$ fonksiyonuna üstel karakteristik veya Lévy üstel fonksiyonu denir.

Sürecin üstel karakteristiği $\psi(z)$ sürekli ve tektir.

Bu sonuç, Lévy süreçlerinin dağılım yapısının tamamen $\psi(z)$ tarafından belirlendiğini ve sürecin zamana bağlı karakteristik fonksiyonunun tek biçimli ve düzgün bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonsuz bölünebilirlik kavramı, Lévy süreçlerinin hem tanımlanabilirliğini hem de analitik olarak temsil edilebilirliğini mümkün kılan temel ilkedir. Fonksiyonların sonlu ve sonsuz değişim özellikleri ile birlikte değerlendirildiğinde, Lévy süreçleri hem sıçramalı hem de sürekli

bileşenleri içeren en genel stokastik süreç sınıfını oluşturur. Bu yapı, Lévy–Khintchine temsiline, Lévy ölçüsüne ve Lévy üçlüsüne geçiş için sağlam bir teorik temel sunmaktadır.

5.3.2. Lévy–Khintchine Formülü

Lévy süreçlerinin en temel sonucu, Lévy–Khintchine temsilidir. Bu formül, her Lévy sürecinin karakteristik fonksiyonunu tam olarak belirlemektedir. $(X_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{R}^d$ üzerinde karakteristik (γ, A, ν) ile tanımlanan bir Lévy süreci ise;

$$E[e^{izX_t}] = e^{it\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

olur. Burada $\psi(z)$ Lévy süreci için Khinchin-Lévy temsilinin üstel fonksiyonudur. Bu fonksiyon;

$$\psi(z) = i\gamma z - \frac{1}{2}Az^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x| \leq 1}) \nu(dx)$$

şekilde ifade edilmektedir. Bu formül; deterministik drift (γ) , brownian (difüzyon) bileşeni (A) ve sıçrama bileşeni (Lévy ölçüsü $-\nu$) gibi Lévy süreçlerinin üç bileşenini açıkça göstermektedir (Sato, 1999; Applebaum, 2004).

$\Phi_t(z)$, X_t için karakteristik fonksiyondur ve Lévy süreçlerinin bağımsız ve durağan artış özellikleri nedeniyle zamana göre üstel yapı göstermektedir. $\psi(z)$, Lévy–Khintchine üstel karakteristiğini; farklı Lévy süreçleri için $\psi(z)$ farklı formda verilmektedir. Genel ifadeyle;

$$\Phi_t(z) = E[e^{izX_t}] = \exp(t\psi(z))$$

şeklinde olup Lévy–Khintchine temsiline bağlanmaktadır.

5.3.3. Lévy Üçlüsü (γ, A, ν)

(γ, A, ν) yapısı, Lévy üçlüsü (Lévy triplet) olarak bilinmekte (Sato, 1999; Applebaum, 2004) ve her Lévy süreci, yukarıda verilen Lévy–Khintchine formülünde ortaya çıkan üç parametre ile belirlenmektedir.

✓ *Drift terimi* (γ) : Sürecin deterministik eğilim bileşeni olup süreci yukarı veya aşağı yönlü kaydırmaktadır.

✓ *Brownian varyans katsayısı* (A): Sürecin sürekli difüzyon kısmını belirlemekte ve Brownian hareketi özel durumda $A > 0$, $v = 0$ ve $\gamma = 0$ değerini alır.

✓ *Lévy ölçüsü* (v): Sıçrama davranışını temsil etmekte ve her sıçrama büyüklüğü x için olasılık yoğunluğunu vermekte ve;

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) v(dx) < \infty$$

ile tanımlanmaktadır.

Bu üçlü, herhangi bir Lévy sürecinin hem sürekli hem de sıçramalı yönlerini tam olarak ortaya koymaktadır.

5.4. Örnek Lévy Süreçleri

Lévy süreçleri oldukça geniş ve esnek bir süreç ailesi olduğundan hem teorik çalışmalarda hem de uygulamalı finans modellerinde yaygın biçimde kullanılmaktadır. Aşağıda literatürde en sık başvuru alan Lévy süreci örneklerine yer verilmektedir.

Bu örnekler, Lévy süreçlerinin hem sıçramalı hem de sürekli bileşenler içeren zengin yapısını ortaya koymakta ve modern finansal modellemede neden merkezi bir konuma sahip olduğunu açıkça göstermektedir.

Brownian hareketi (Sürekli Lévy süreci): Brownian hareketi, parametre üçlüsü $(\gamma, A, v) = (0, A, 0)$ ile temsil edilen, tamamen sürekli bir Lévy sürecidir. Sıçrama içermemesi nedeniyle Lévy süreçleri içindeki en temel sürekli difüzyon örneğini oluşturmaktadır. Finansal modellemede volatilitenin temel kaynaklarından biri olarak değerlendirilmektedir.

Poisson süreci: Poisson süreci, Lévy üçlüsü $(\gamma, 0, \lambda \delta_1)$ ile ifade edilen ve yalnızca sıçrama sayısını modele dahil eden saf sıçramalı bir Lévy sürecidir. Her sıçrama bir birim büyüklüğe sahiptir ve olayların sayılması esasına dayanmaktadır. Olay yoğunluğu λ ile karakterize edilmektedir.

Bileşik Poisson süreci: Yoğunluğu λ olan bileşik Poisson süreci;

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada N_t Poisson süreci, Y_i ise bağımsız ve özdeş dağılıma sahip rastgele sıçrama büyüklüklerini göstermektedir.

Sıçrama büyüklüklerinin rastlantısallığı, süreci saf Poisson sürecinden daha esnek hâle getirmektedir (Cont ve Tankov, 2004). Finansal piyasalarda haber şokları, ani fiyat sıçramaları ve büyük volatilité atakları gibi olayların modellendiği durumlarda sıklıkla kullanılmaktadır.

Gama süreci: Gama süreci, yalnızca pozitif sıçramaları olan, sürekli artan bir Lévy sürecidir. Bu özellikleri nedeniyle özellikle volatilité modellemesinde, stokastik yoğunluklarda ve kredi riski uygulamalarında önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Varyans gama (VG) süreci: VG süreci, Brownian hareketinin gama süreci ile rastgele bir zaman değişimine tabi tutulmasıyla elde edilen bir Lévy sürecidir (Madan ve Seneta, 1990). Finansal getirilerde sıklıkla gözlenen kalın kuyruklu ve sivri tepeli dağılımları başarıyla temsil edebilmesi nedeniyle modern finansal ekonometrinin temel modelleri arasında yer almaktadır. VG;

$$X_t = \gamma G_t + \sigma W_{G_t}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada G_t , gama süreç zamanını (rastgele zaman değişimi); W_{G_t} , gama sürecinde değerlendirilmiş Brownian hareketini; γ , drift (sürüklenme) parametresini ve σ ise volatilité parametresini göstermektedir. Bu denklem, Brownian hareketinin gama süreç ile zaman değiştirilmesine dayanan bir Lévy süreci oluşturmaktadır (Madan ve Seneta, 1990).

Normal Inverse Gaussian (NIG) süreci: NIG süreci, hem kalın kuyruklu hem de asimetrik dağılımları modelleyebilme kapasitesi sayesinde finansal uygulamalarda yaygın olarak kullanılan bir Lévy sürecidir. Opsiyon fiyatlama modellerinde ve yüksek frekanslı veri analizlerinde önemli bir yer edinmektedir (Schoutens, 2003; Barndorff-Nielsen, 1998). Karakteristik üstel fonksiyon;

$$\psi(z) = \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + iz)^2} \right)$$

olarak ifade edilirse, NIG karakteristik fonksiyonu ise;

$$\Phi_t(z) = \exp(t \psi(z))$$

ile verilmekte, Lévy–Khintchine üstel karakteristiğine sahiptir. Burada $\alpha > |\beta|$, tempering parametresini; β , asimetri parametresini; $\delta > 0$, yoğunluk ölçek parametresini ve i ise imajiner birimini vermektedir. Bu ifade,

karakteristik fonksiyondaki Lévy üstel teriminin biçimini vermekte ve süreçteki kalın-kuyruk davranışı ile asimetrisinin matematiksel temsili için kullanılmaktadır (Barndorff-Nielsen, 1998).

Temperlenmiş stabil süreçler: Temperlenmiş stabil (Tempered-stable) süreçler, klasik α -stable Lévy süreçlerinin uç kuyruk davranışını törpüleyen bir yapıya sahiptir. Bu nedenle ağır kuyrukları modelleme kapasitesini korurken dağılımın kuyruğunun aşırı genişlemesini engellemektedir. Finansal piyasalarda yüksek frekanslı oynaklık yapılarının ve kalın kuyruklu getirilerin temsilde sıklıkla kullanılan güçlü bir süreç ailesi olarak değerlendirilmektedir.

6. Finansal Uygulamalara Geçiş

Lévy süreçleri, finansal piyasalarda gözlenen hem sürekli dalgalanmaları hem de ani sıçramaları aynı modelleme çerçevesi içerisinde temsil edebilme kapasitesi sayesinde modern finans teorisinde önemli bir yer edinmiştir. Geleneksel Black–Scholes modeli, fiyat hareketlerini Brownian hareketine dayandırdığı için yalnızca sürekli oynaklık bileşenini yakalayabilmektedir. Oysa finansal piyasalar; ani haber etkileri, makroekonomik şoklar, şirket iflasları ve likidite daralmaları gibi sıçrama niteliği taşıyan birçok öngörülemez olaya sahne olmaktadır. Bu nedenle Lévy süreçleri, finansal varlık fiyatlarının gerçekçi biçimde modellenmesine olanak tanıyan daha geniş bir teorik çerçeve sunmaktadır (Cont ve Tankov, 2004; Schoutens, 2003).

Finansal uygulamalara geçişte temel sorular;

✓ *Fiyatlar neden yalnızca sürekli değil, aynı zamanda sıçramalı bir yapıya sahiptir?*

✓ *Brownian hareketi bu dinamikleri açıklamakta neden yetersiz kalmaktadır?*

✓ *Lévy süreçleri hangi finansal modellerde temel rol üstlenmektedir?*

şeklinde özetlenebilir. Bu sorular, üç alt başlık altında ayrıntılı biçimde ele alınmaktadır.

6.1. Black–Scholes Modelinin Sınırlılıkları

Black–Scholes modeli, varlık fiyatlarının geometrik Brownian hareketine uyduğunu varsaymaktadır.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Bu model, matematiksel tutarlılığı ve kapalı form çözümleri nedeniyle finans literatüründe merkezi bir konum edinmiş olsa da, ampirik veriler incelendiğinde çeşitli sınırlılıkları olduğu görülmektedir.

Süreklilik varsayımı ve sıçrama yokluğu: Model, fiyatların sürekli şekilde evrim geçirdiğini ve ani sıçramalar içermediğini varsaymaktadır. Oysa hisse senetleri, endeksler, döviz kurları ve emtia piyasaları, bilgi akışındaki ani değişimler, haber etkileri ve beklenmedik kararlar nedeniyle büyük sıçramalar sergileyebilir. Brownian hareketi bu tür sıçramalı davranışları açıklamakta yetersiz kalmaktadır (Cont ve Tankov, 2004).

Getiri dağılımlarının normal dağılım varsayımı: Modelde log-getiriler normal dağılıma sahiptir.

$$\ln S_t \sim N(\cdot)$$

Gerçek piyasa getirileri ise genellikle kalın kuyruklu, asimetrik ve sivri tepeli dağılım yapısı sergilemektedir. Bu nedenle normal dağılım varsayımı, finansal getirilerin ampirik özelliklerini temsil etmede yetersiz kalmaktadır (Schoutens, 2003).

Volatilitenin sabit olması varsayımı: Finansal piyasalarda volatilité sabit değildir; zamanla değişmekte, kümelenme davranışı göstermekte ve yüksek frekansta belirgin dalgalanmalara sahne olmaktadır. Lévy süreçleri, hem sıçrama bileşenleri hem de oynaklık dinamikleri açısından daha esnek bir modelleme çerçevesi sunmaktadır.

Kuyruk riskinin yetersiz açıklanması: Black–Scholes modeli, ekstrem fiyat hareketlerinin gerçekleşme olasılığını sistematik olarak düşük tahmin etmektedir. Bu durum, özellikle opsiyon fiyatlamasında, portföy risk ölçümünde ve Value-at-Risk hesaplarında önemli hatalara yol açabilir. Lévy süreçleri kalın kuyruk yapısını daha gerçekçi biçimde temsil etmektedir (Cont ve Tankov, 2004).

Sonuç olarak Black–Scholes modeli, finansal piyasaların gözlenen birçok temel özelliğini açıklamada yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle sıçramalı süreçlere dayalı alternatif modeller geliştirilmiştir (Merton, 1976).

6.2. Lévy Süreçlerinin Finansal Modellemedeki Rolü

Lévy süreçleri, finansal varlıkların zaman içindeki davranışını hem sürekli hem de sıçramalı bileşenleriyle temsil edebildiğinden modern finans teorisinde önemli bir modelleme araçları ailesi oluşturmaktadır. Finansal uygulamalardaki önemleri aşağıdaki başlıklar altında değerlendirilebilir.

Sıçramalı fiyat dinamiklerini doğru temsil etme: Finansal piyasalarda sıkça gözlenen ani fiyat değişimleri, Lévy süreçlerinin sıçrama bileşenleri aracılığıyla doğal biçimde modellenenebilir. Ani haber etkileri, makroekonomik veri açıklamaları, iflaslar ve likidite krizleri gibi olaylar Poisson tipi sıçramalar, bileşik Poisson süreçleri veya sonsuz aktivite süreçleriyle temsil edilebilir.

Kalın kuyruk ve asimetri üretme kapasitesi: Lévy süreçleri, normal dağılımın ötesinde kalan kalın kuyruklu, asimetrik ve sivri tepeli dağılımlar üretebilmektedir. Bu özellik, finansal getirilerin ampirik yapısıyla büyük ölçüde uyumludur (Schoutens, 2003).

Opsiyon fiyatlamada esneklik: Lévy süreçleri, Black-Scholes'in açıklamakta zorlandığı volatilité gülümsemesi (smile), volatilité çarpıklığı (skew) ve kuyruk davranışı gibi olguları başarılı biçimde modelleyebilir. VG, NIG, CGMY ve Kou çift üstel sıçrama modelleri bu alandaki önemli uygulamalardandır (Barndorff-Nielsen, 1998; Carr vd., 2002).

Risk-nötr ölçü altında martingale özelliği: Lévy süreçleri uygun telafi terimleriyle risk-nötr ölçü altında martingale hâline getirilebilmektedir. Bu özellik modern opsiyon fiyatlama teorisinin temel koşullarından biridir (Applebaum, 2004).

Sonsuz aktivite ve sonsuz değişim yapılarının temsili: Brownian hareketinin temsil edemediği yüksek frekanslı fiyat davranışları, Lévy süreçlerinin esnek yapısı sayesinde daha gerçekçi biçimde modellenenebilir. Bu nedenle Lévy süreçleri özellikle yüksek frekanslı fiyat modellerinde, mikro-yapı gürültüsü analizlerinde ve finansal ekonometrik çalışmalarda geniş kullanım alanına sahiptir.

6.3. Sıçramalı ve Sonsuz Aktivite Süreçlerine Geçiş

Finansal zaman serilerinde yalnızca birkaç büyük sıçrama değil, çok sayıda küçük sıçrama da gözlemlenir. Bu durum, Lévy süreçlerinin sıçrama yapısına göre iki geniş kategoriye ayrılmasını mümkün kılmaktadır.

Sıçramalı-difüzyon modelleri (Sonlu aktivite): Bu modellerde sıçrama sayısı sonlu olup genellikle Poisson sürecine dayanmaktadır. Örnek olarak; Merton'un sıçramalı-difüzyon modeli, bileşik Poisson süreçleri ve Kou çift üstel sıçrama modeli verilebilir. Kou modelinde sıçrama büyüklüğü çift üstel dağılıma sahiptir. Model;

$$f_Y(y) = p \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y>0} + (1 - p) \eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y<0}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada p , yukarı yönlü (pozitif) sıçramaların olasılığını; $(1 - p)$, aşağı yönlü (negatif) sıçramaların olasılığını; $\eta_1 > 0$ ve $\eta_2 > 0$ üstel parametrelerini göstermektedir. Pozitif y için yoğunluk $p \eta_1 e^{-\eta_1 y}$ ve negatif y için yoğunluk ise $(1 - p) \eta_2 e^{\eta_2 y}$ ile hesaplanmaktadır (Kou, 2002). Bu modeller büyük fakat seyrek sıçramaları yakalayabilmektedir.

Merton'un sıçramalı-difüzyon modeli ise;

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t + (J_{t-1}) dN_t)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada N_t , yoğunluğu λ olan Poisson sürecini; J_t , sıçrama büyüklüğünü ve $\ln J_t \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ göstermektedir (Merton, 1976).

Sonsuz aktivite Lévy süreçleri: Bu süreçlerde çok küçük sıçramaların sonsuz sayıda gerçekleşmesine izin verilmektedir. Önemli örnekleri arasında; VG, CGMY, NIG ve α -stable süreçleri bulunmaktadır (Carr vd., 2002).

Bu modeller, finansal getirilerde gözlenen yüksek frekanslı kalın kuyruk ve sivri tepe davranışlarını başarılı biçimde temsil etmektedirler (Cont ve Tankov, 2004; Schoutens, 2003).

Sonsuz aktivite modellerinin önemi: Finansal piyasalar kısa zaman aralıklarında; ince oynaklık, yoğun mikro-hareketlilik ve küçük sıçramaların yüksek sıklığı gibi özellikler sergilemektedir.

Brownian hareketi bu davranışı yakalayamaz ve Poisson süreçleri ise yalnızca büyük sıçramaları modelleyebilir. Sonsuz aktivite Lévy süreçleri ise her iki yapıyı bir arada temsil edebilen kapsamlı modeller sunmaktadır.

Genel olarak; Lévy süreçleri, finansal varlık fiyatlarının karmaşık yapısını sürekli ve sıçramalı bileşenleri bakımından gerçekçi biçimde temsil eden modellerdir. Black–Scholes modelinin sınırlılıklarını aşarak volatilité gülümsemeleri, kalın kuyuklar ve yüksek frekans davranışlarını açıklayabilme kapasiteleri sayesinde modern finans teorisinin en güçlü araçları arasında yer almaktadır.

7. Sonuç

Bu bölümde, stokastik süreçlerin temel kavramlarından başlayarak Lévy süreçlerinin yapısal özelliklerine uzanan kapsamlı bir kuramsal çerçeve sunulmuştur. Öncelikle stokastik süreçlerin tarihsel gelişimi ve deterministik modellerin karmaşık sistemlerdeki belirsizliği açıklamada neden yetersiz kaldığı tartışılmış; bu bağlamda Paul Lévy'nin 1930'lu yıllarda ortaya koyduğu çalışmaların modern stokastik modelleme açısından dönüştürücü niteliği vurgulanmıştır (Sato, 1999). Böylelikle stokastik süreç yaklaşımının matematiksel temellerinin, özellikle finansal ve fiziksel sistemlerin belirsizlik yapısını temsil etmede neden kritik bir rol oynadığı ortaya konmuştur.

Bölüm boyunca Poisson süreci, Brownian hareketi, kompanse Poisson süreci ve genel sıçramalı süreçler gibi stokastik süreçler ayrıntılı biçimde ele alınmış; bu süreçlerin Lévy süreçlerinin yapı taşları olduğu gösterilmiştir. Poisson sürecinin sıçramalı süreçlerin en temel örneğini oluşturması, Brownian hareketinin ise sürekli dalgalanmaların modellenmesinde temel bir rol üstlenmesi, Lévy süreçlerinin hem süreksiz hem de sürekli bileşenleri içeren hibrit yapısını anlamada kritik önem taşımaktadır. Bu süreçlerin ortak özellikleri olan bağımsız ve durağan artışların, Lévy süreçlerinin tanımına doğrudan temel oluşturduğu vurgulanmıştır (Applebaum, 2004; Cont ve Tankov, 2004).

Lévy süreçlerinin genel yapısı sunulurken Lévy–Khintchine formülü, Lévy ölçüsü ve Lévy üçlüsü ayrıntılı biçimde açıklanmış; sürecin tamamının tek bir kompakt matematiksel ifadeyle tanımlanabilmesini sağlayan Lévy–Khintchine formülünün stokastik süreçler kuramındaki merkezi konumu ortaya konmuştur. Özellikle Lévy ölçüsünün sıçrama büyüklükleri ve sıçrama yoğunluklarının belirlenmesindeki rolü açıklanmış; bu ölçünün finansal piyasalarda gözlenen ağır kuyuklu ve asimetrik davranışların

modellenmesinde neden kritik bir parametre olduğu gösterilmiştir (Schoutens, 2003).

Bu kuramsal açıklamalar Lévy-Itô ayrışımıyla derinleştirilmiş, her Lévy sürecinin sürüklenme terimi, Brownian bileşeni, sonsuz sayıda küçük sıçrama ve seyrek büyük sıçramalardan oluşan dört ana yapı taşına ayrılabilirdiği gösterilmiştir. Bölümde yer alan şekil ve örnek yörüngeler üzerinden bu ayrışmanın görsel olarak nasıl somutlaştığı açıklanmış; süreçlerin caddâğ özellikleri, sıçrama aktivitesinin sınıflandırılması, büyük ve küçük sıçramaların sürecin dinamiğine etkileri ve sonsuz aktivite modellerinin temel özellikleri tartışılmıştır.

Bölümün temel bulgularından biri, Lévy süreçlerinin finansal modelleme açısından sunduğu yüksek esneklik ve temsil gücüdür. Geleneksel difüzyon modellerinin açıklamakta yetersiz kaldığı ağır kuyruklu getiriler, volatilité kümelenmesi, piyasa çöküşleri sırasında gözlenen ani büyük sıçramalar, asimetrik fiyat davranışları ve volatilité gülümsemesi gibi olguların Lévy süreçleri çerçevesinde doğal olarak ortaya çıktığı gösterilmiştir (Cont ve Tankov, 2004). Bu nedenle Lévy süreçleri; opsiyon fiyatlama, risk yönetimi, portföy optimizasyonu, yüksek frekanslı işlem analizi ve piyasa mikro-yapısı modellemeleri gibi geniş bir uygulama alanında temel yöntemlerden biri hâline gelmiştir.

Buna ek olarak, stokastik süreçler kuramının daha geniş bağlamı ele alınarak, olasılık uzayının yapısı, filtrasyon kavramı, adaptif süreçler ve ölçülebilirlik koşulları gibi stokastik analizin temel unsurları sistematik biçimde tanıtılmıştır. Bu kavramsal çerçeve, ilerleyen bölümlerde ayrıntılı biçimde işlenecek olan Itô integrali, yarı-martingale yapıları, stokastik diferansiyel denklemler ve finansal modelleme uygulamalarının anlaşılması için gerekli matematiksel altyapıyı oluşturmaktadır.

Sonuç olarak bu bölüm, stokastik süreçlerin teorik temellerinden başlayarak Lévy süreçlerinin karmaşık yapısına kadar uzanan kapsamlı bir temel sunmuş; hem matematiksel teoriyi hem de finansal uygulamalara yönelik motivasyonu bütüncül bir yaklaşımla ele almıştır. Bu kuramsal zemin, sonraki bölümlerde geliştirilecek olan Lévy tabanlı finansal modellerin, opsiyon fiyatlama yöntemlerinin ve sıçramalı-difüzyon süreçlerine dayalı stokastik diferansiyel denklemlerin anlaşılmasına doğrudan katkı sağlayacaktır. İzleyen bölümlerde bu teorik yapı, model türetimleri, parametrizasyon yöntemleri ve finansal veri analizleri aracılığıyla uygulamalı bir çerçeveye taşınacaktır.

Kaynaklar

- Applebaum, D. (2004). *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2(1), 41–68.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*. Cambridge University Press.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D., & Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75(2), 305–332.
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC.
- Doob, J. L. (1953). *Stochastic processes*. Wiley.
- Fristedt, B. E., & Gray, L. F. (1997). *A modern approach to probability theory*. Birkhäuser.
- Hull, J. C. (2001). *Fundamentals of futures and options markets*. Pearson Education.
- Kallenberg, O. (2002). *Foundations of modern probability* (2nd ed.). Springer.
- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson processes*. Oxford University Press.
- Klebaner, F. C. (2001). *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8), 1086–1101.
- Madan, D. B., & Seneta, E. (1990). The variance gamma model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4), 511–524.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- Øksendal, B., & Sulem, A. (2005). *Applied stochastic control of jump diffusions*. Springer.
- Protter, P. E. (2005). *Stochastic integration and differential equations* (2nd ed.). Springer.
- Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives*. John Wiley & Sons.